

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.



<http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/>

Скороход Г.И. *Общенаучные понятия в обучении математике. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 1(15). С. 302-304.*

Skorokhod G. *Common Scientific Concepts In Teaching Mathematics. Physical and Mathematical Education. 2018. Issue 1(15). P. 302-304.*

УДК 372.851

Г.И. Скороход

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Украина
gskorokhod@yahoo.com

DOI 10.31110/2413-1571-2018-015-1-058

ОБЩЕНАУЧНЫЕ ПОНЯТИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. Подавляющее большинство учеников общеобразовательной школы не станут математиками, следовательно, математика для них должна быть именно общеобразовательным предметом. Поэтому, акцент при обучении математике желательно делать на понятиях и методах решения задач, которые являются общенаучными и объединяют математику с другими естественными и техническими науками и даже с философией как общим подходом к познанию мира. Основные математические понятия и методы, имеющие общенаучное и философское значение, подробно рассмотрены в книгах Д. Пойя. В настоящей статье приведен более широкий перечень таких понятий (с короткими комментариями). Понятия сгруппированы в два раздела: 1) общенаучные математические понятия (аксиома, множество, функция, график, формула, постановка задачи, методы решения, алгоритм, аналогия, моделирование, модель, математическое моделирование, преобразование объекта, последовательность преобразований, инвариант преобразования, аддитивность); 2) пары противоположных (и, одновременно, взаимодополняющих друг друга) понятий (формальная логика и правдоподобные рассуждения, истинное и ложное высказывания, гипотеза и теорема, необходимые и достаточные условия, прямое, обратное и противоположное утверждения, прямая и обратная теоремы, прямая и обратная операции, прямое и обратное преобразования, прямая и обратная функции, прямая и обратная задачи, равенство, неравенство и уравнение, постоянство и изменение, постоянная и переменная величины, максимум и минимум, наибольшее и наименьшее значения величины, вычисление и оценка значения величины, индукция и дедукция, анализ и синтез, обобщение и специализация, симметрия и асимметрия, непрерывность и разрыв, качество и количество, устойчивые и неустойчивые решения, устойчивость и неустойчивость объекта, непрерывное и дискретное, точное и приближённое решения, точные и приближенные методы решения, аналитические и численные методы решения). Общенаучные методы решения математических задач (31 метод) будут рассмотрены в отдельной статье автора.

Ключевые слова: математика, обучение математике, содержание школьного курса математики, математические понятия, методы решения математических задач.

Постановка проблемы. Подавляющее большинство учеников общеобразовательной школы не станут математиками, следовательно, математика для них должна быть именно общеобразовательным предметом. «Операции практического порядка, приспособление к природным условиям и необходимость понимать проблемы, выдвигаемые технической, экономической и социальной жизнью, всё более требуют элементарных математических знаний (вычисления, практическая геометрия, геометрические представления, формулы, уравнения, функции, таблицы и графики). Эти основные понятия и средства также играют роль в возрастающем количестве профессий» [1]. На наш взгляд, акцент при обучении математике желательно делать на понятиях и методах решения задач, которые являются общенаучными и объединяют математику с другими естественными и техническими науками и даже с философией как общим подходом к познанию мира.

Анализ актуальных исследований. Основные математические понятия и методы, имеющие общенаучное и философское значение, подробно рассмотрены в книгах Д. Пойя [2-4].

Цель статьи. В настоящей статье приведен более широкий перечень таких понятий (с короткими комментариями). Общенаучный характер отобранных понятий очевиден. Специалист легко найдёт примеры конкретизации общенаучного понятия в своей области деятельности. Понятия сгруппированы в два раздела: 1) общенаучные математические понятия (16 понятий); 2) пары противоположных (и, одновременно, взаимодополняющих друг друга) понятий (31 пара). Согласно методу укрупнения дидактических единиц [5] при обучении взаимосвязанные понятия желательно рассматривать в паре. Общенаучные методы решения математических задач (31 метод) будут рассмотрены в отдельной статье автора.

Изложение основного материала. Нами отобраны следующие математические понятия, которые являются общенаучными:

Общенаучные математические понятия

Аксиома и неопределяемые понятия как фундамент дедуктивной теории.

Множество – базовое понятие математики, отражающее тот факт жизни, что некоторые объекты рассматриваются как элементы одного объекта – множества.

Функция. Одно из основных понятий математики, выражающее зависимость одних переменных величин от других. Способы представления функции, их достоинства и недостатки. Превалирование получения функции в виде таблицы и представления функции в виде графика в связи с развитием компьютерных вычислений.

Формула – связь между объектами, выраженная с помощью символов или слов.

График – визуальное представление связей между объектами из различных областей жизни, чаще всего, визуальное представление соответствия между элементами двух множеств (график функции, дежурств, движения поездов, амплитудно-фазовая частотная характеристика, сетевой график и т.д.).

Постановка задачи. Методы решения. Алгоритм. Эти понятия относятся ко всем наукам и всем областям жизни, в которых решаются задачи.

Аналогия – подобие, равенство отношений; сходство предметов, явлений, процессов, величин и т. п. в каких-либо свойствах [2, 3]. Примеры в математике: 1) пропорция, 2) подобие фигур, 3) аналогия классификаций кривых второго порядка и уравнений математической физики.

Моделирование как вид аналогии. **Модель** как результат моделирования.

Математическое моделирование – переформулирование постановки задачи на математический язык.

Преобразование объекта, последовательность преобразований [4]. Пример: основным аналитическим методом решения уравнения является равносильные преобразования его к одному или нескольким уравнениям, методы решения которых известны.

Инвариант преобразования – объект (часть, характеристика или свойство исходного объекта), который не меняется при данном преобразовании. Тип задачи: преобразования объекта. Пример: при равносильных преобразованиях уравнения инвариантом можно считать само искомое решение, в этом случае, такой взгляд не помогает решить уравнение, но часто нахождение инварианта способствует решению задачи.

Аддитивность. Свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям при любом разбиении объекта на части. Это свойство редко акцентируется преподавателями и, соответственно, слово «аддитивность» употребляется редко (в то время, как оно может легко восприниматься современными учениками, ибо связано с хорошо им знакомым английским словом «add»). И главное, этим свойством обладают многие величины и реальные объекты, и его постоянно используют, когда разбирают искомую величину (длину, площадь, объём и др.) на части, вычисляют значения этой величины для каждой части отдельно и полагают сумму этих значений равной искомому значению величины. В математике аддитивность связана с линейностью, нелинейные объекты этим свойством не обладают, например, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, но $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$. Поэтому теории нелинейных объектов не обладают столь большой степенью общности и глубиной исследования свойств, как линейные теории.

Пары противоположных (и, одновременно, взаимодополняющих друг друга) понятий

Истинное и ложное высказывания – категории как обыденной жизни, так и научных теорий и математической логики.

Формальная логика и правдоподобные рассуждения. Подробное исследование роли правдоподобных рассуждений в нахождении истины проведено в книге Д. Пойя [3].

Гипотеза и теорема. Гипотеза – правдоподобное утверждение, а теорема – доказанное утверждение.

Необходимые и достаточные условия. Необходимые и достаточные условия можно рассматривать по отношению к различным процессам и явлениям жизни. В математике рассматриваются необходимые и достаточные условия истинности высказывания, именно, если из истинности высказывания А следует (с необходимостью) истинность высказывания В, то В называется необходимым условием для А, а А – достаточным условием для В. Если, к тому же, из В следует А, то А и В являются необходимыми и достаточными условиями истинности друг для друга.

Прямое, обратное и противоположное утверждения.

Прямая и обратная теоремы как частный случай **прямого и обратного утверждения.**

Прямая и обратная операции, в частности, **прямое и обратное преобразования**: выражение решения уравнения через обратную функцию. Если прямая операция однозначна (т.е. имеет единственный результат), то обратная операция может быть как однозначной, так и многозначной, и бесконечнозначной (решения тригонометрических уравнений).

Прямое и обратное преобразования, как частный случай прямой и обратной операции.

Прямая и обратная функции, как частный случай прямой и обратной операции.

Прямая и обратная задачи. Если в прямой задаче дано А и требуется найти В, то в обратной дано В и требуется найти А.

Равенство и неравенство. Уравнение. Уравнение $a=b$ есть граница между двумя неравенствами $a < b$ и $a > b$. Именно поэтому решение неравенства начинается с решения соответствующего уравнения: отталкиваясь от границы, формируется решение неравенства.

Постоянные и изменения. Постоянная и переменная величины.

Вычисление и оценка значения величины.

Максимум и минимум, экстремум – общее название максимума и минимума [3]. Условный экстремум. **Наибольшее и наименьшее значения** переменной величины, функции.

Индукция и дедукция [3].

Анализ и синтез.**Обобщение и специализация** [3].**Общее и частное решения** как множество и подмножество. Единичное как элемент множества.**Симметрия и асимметрия.****Сходство и различие. Общее и различное.** Популярны тесты на нахождение общих свойств множества объектов.**Качество и количество.** Качество можно рассматривать как набор общих свойств множества объектов, т.е. качество связано с подобием объектов. Знак числа можно интерпретировать как его качество, а противоположные числа – как качественно различные.**Непрерывность и разрыв.** Качественное изменение (разрыв) одной характеристики объекта при непрерывном изменении другой (переход количества в качество при достижении или превышении меры, т.е. границы). Яркий пример – гипербола: скачок переменной y от $-\infty$ к $+\infty$ при переходе значения x от -0 к $+0$.**Устойчивость и неустойчивость объекта.** Потеря устойчивости как переход в противоположное качество.**Устойчивые и неустойчивые решения. Бифуркация решения** при непрерывном изменении параметра задачи.**Непрерывное и дискретное.** Каждый объект рассматривается как непрерывный или дискретный. Представляет интерес показать, как непрерывный объект моделируется не только непрерывной, но и дискретной моделями, а дискретный – как дискретной, так и непрерывной.**Точное и приближённое решения.****Точные и приближенные методы решения.****Аналитические и численные методы решения.** Достоинства и недостатки. Превалирование численных методов с развитием компьютерной техники.**Выводы.** В статье приведены 47 математических понятий, которые являются общенаучными, и освоение которых, по нашему мнению, должно быть одной из основных целей общего образования как в школе, так и в вузе. В этом мнении нас поддерживает тот факт, что книга Д. Пойя «Математическое открытие» [4] адресована учителям средней школы. Для реализации этого желательно на уроках по математике и естественным наукам всегда, когда это уместно, употреблять эти понятия, раскрывать их смысл и применение в других науках.**Список использованных источников**

1. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математике. Изд. 3-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 248 с.
2. Пойя, Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз РСФСР, 1959. 208 с.
3. Пойя, Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Изд-во иностранной литературы., 1957. 536 с.
4. Пойя, Д. Математическое открытие. М.: Наука, 1970. 452 с.
5. Эрдниев, П.М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: кн. для учителя. М.: Просвещение, 1986. 256 с.

References

1. Fridman, L.M. Teoreticheskie osnovy metodiki obucheniya matematike [Tekst] / L.M. Fridman. – Izd. 3-e. – М.: Knizhnyy dom «LIBROKOM», 2009. – 248 s.
2. Polya, D. Kak reshat zadachu [Tekst] / D. Polya. – М.: Uchpedgiz RSFSR, 1959. – 208 s.
3. Polya, D. Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya [Tekst] / D. Polya. – М.: Izd-vo inostrannoy literaturyi., 1957. – 536s.
4. Polya, D. Matematicheskoe otkrytie [Tekst] / D. Polya. – М.: Nauka, 1970. – 452 s.
5. Erdniev, P.M. Ukrupnenie didakticheskikh edinit v obuchenii matematike [Tekst]: kn. dlya uchitelya / P.M. Erdniev, B.P. Erdniev. – М.: Prosveshchenie, 1986. – 256 s.

COMMON SCIENTIFIC CONCEPTS IN TEACHING MATHEMATICS**Georgiy Skorokhod***Oles Honchar Dnipro National University*

Abstract. *The overwhelming majority of pupils of a comprehensive school will not become mathematicians, therefore, mathematics for them should be just a general educational subject. Therefore, the emphasis in teaching mathematics is desirable to do on the concepts and methods of solving problems that are general scientific and integrate mathematics with other natural and technical sciences and even with philosophy as a general approach to cognition of the world. Basic mathematical concepts and methods, having a general scientific and philosophical significance, are considered in detail in the books of D. Polya. In this article, a broader list of such concepts is given (with short comments). The concepts are grouped into two sections: 1) general scientific mathematical concepts (axiom, set, function, graph, formula, statement of the problem, solution methods, algorithm, analogy, modeling, model, mathematical modeling, object transformation, sequence of transformations, transformation invariant, additivity) ; 2) pairs of opposing (and simultaneously complementary) concepts (formal logic and plausible reasoning, true and false statements, hypothesis and theorem, necessary and sufficient conditions, direct, inverse and opposite statements, direct and inverse theorems, direct and inverse operations, direct and inverse transformations, direct and inverse functions, direct and inverse problems, equality, inequality and equation, maximum and minimum, largest and smallest values, calculation and evaluation of the value of the quantity, and induction and deduction, analysis and synthesis, generalization and specialization, symmetry and asymmetry, continuity and discontinuity, quality and quantity, stable and unstable solutions, stability and instability of the object, continuous and discrete, exact and approximate solutions, exact and approximate solution methods, analytical and numerical methods of solution). Common scientific methods for solving mathematical problems (31 methods) will be considered in a separate article of the author.*

Keywords: *mathematics, teaching mathematics, the content of the school course of mathematics, mathematical concepts, methods for solving mathematical problems.*