Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Скуратовський Р.В., Руденко Д.В. Суми послідовних чисел Фібоначчі. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 1(15). С. 305-310.

Skuratovskii R., Rudenko D. The Sum Of Consecutive Fibonacci Numbers. Physical and Mathematical Education. 2018. Issue 1(15). P. 305-310.

УДК 378.14

Р.В. Скуратовський, Д.В. Руденко
Міжрегіональна Академія управління персоналом,
Києво-Печерський ліцей №171, Україна
ruslcomp@mail.ru
DOI 10.31110/2413-1571-2018-015-1-059

СУМИ ПОСЛІДОВНИХ ЧИСЕЛ ФІБОНАЧЧІ

Анотація. *У роботі виведено нові теореми про періодичність сум Фібоначчі, зведених за модулем, що рівний кількості доданків у кожній сумі з елементів послідовності Фібоначчі.*

У статті запропоновано нові властивості лінійних рекурсивних послідовностей, пов'язані з їх сумами.

Зокрема у нашій статті вивчаються теоретико-числові характеристики чисел Фібоначчі та пов'язаних з нею послідовностей. Вперше досліджено необхідні і достатні умови періодичності сум Фібоначчі і умови кратності суми будь-яких послідовних чисел Фібоначчі числу її доданків . Наукова робота виникла навколо пошуку розв'язання однієї авторської задачі, яку було запропоновано на заключному етапі XIX Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, що проходив у жовтні 2016 року в місті Чернівці, після цього автором було узагальнено умови турнірної задачі. За допомогою комп'ютерних обчислень було перевірено відповідні значення, які задовольняють умову доведеної нами теореми.

Актуальність вибраної теми дослідження обумовлена численними застосуваннями послідовності чисел Фібоначчі та їх узагальнень у найрізноманітніших напрямках наукових досліджень, зокрема, вони широко використовуються у математиці, криптографії, кодуванні інформації, фізиці, філософії, ботаніці, біології, геології, кристалографії, медицині, психології, астрономії, економіці, комп'ютерних науках, мистецтві тощо. Досліджені нами послідовності мають не лише теоретичне, а й прикладне значення, так досліджена нами послідовність Люка застосовується у кодуванні та криптографії. Крім того нами розглянуто нові послідовності скінченних сум послідовних елементів, що взагалі являють собою нову послідовність. Як і класична послідовність Фіббоначчі наші лінійні рекурентні послідовності знайдуть застосування в самій математиці, наприклад, Ю. Матіясевич з використанням чисел Фібоначчі розв'язує відому 10-у проблему Гільберта. Інша з обраних нами для узагальнення послідовностей а саме послідовність чисел Люка досліджується і в наш час [10]. Досліджено закономірність зміни періоду послідовності введених нами сум послідовних елементів в залежності від того чи є 5 квадратичним лишком в Z_p. Наведено строге обґрунтування за допомогою теоретико-числового апарату.

Всі твердження можуть бути включені в спецкурси з учбового плану, що орієнтований для підготовки магістрів-педагогів а також можуть бути використані як позакласний матеріал керівниками гуртків.

Ключові слова: *лінійна рекурсивна послідовність, послідовність Фібоначчі і Люка, періодичність різниць часткових послідовність сум Фібоначчі і Люка, олімпіадні задачі, матеріал для гурткової роботи.*

Вступ. Задачі, пов'язані з числами Фібоначчі, наводяться у багатьох популярних виданнях, розглядаються на заняттях шкільних математичних гуртків, пропонуються на різних математичних конкурсах та олімпіадах. Крім того, існує велика кількість наукових товариств, які професійно вивчають властивості чисел Фібоначчі та їх численні застосування у математиці, фізиці, філософії, ботаніці, біології, геології, кристалографії, медицині, психології, астрономії, економіці, комп'ютерних науках, мистецтві тощо. Такі послідовності мають не лише теоретичне, а й прикладне значення. Зокрема, часто числа Фібоначчі зустрічаються при вивченні різних структур даних і алгоритмів, за їх допомогою винайдені методи розв'язання ряду кібернетичних задач (теорії пошуку, ігор, програмування, тощо), задач теорії прогнозування та теорії кодування. Більш детально із застосуванням послідовності Фібоначчі у теорії кодування можна познайомитися у добре відомих працях Стахова О.П. [8], Лужецького В.А. [3] та монографії Кнута [2]. Числа Фібоначчі широко використовуються для прогнозів зміни ціни, курсів валют на фінансових ринках, однак недоліком цього методу прогнозування є те, що їх застосування можливе в основному по попередньому ринку, а не по майбутньому [5]. Ще, наприклад, Ю. Матіясевич з використанням чисел Фібоначчі розв'язує відому 10-у проблему Гільберта. Як бачимо, застосування чисел Фібоначчі у науці є досить значним і тому встановлення нових властивостей цих чисел, на нашу думку, є безперечно **актуальним**.

У нашій статті вивчаються теоретико-числові характеристики чисел Фібоначчі та пов'язаних з нею послідовностей. Наукова робота виникла в результаті узагальнення умов і пошуку науково обгрунтованого розв'язання однієї авторської задачі, яку було запропоновано на заключному етапі XIX Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, що проходив у жовтні 2016 року в м. Чернівці. Сформулюємо цю задачу: *розглянемо послідовність чисел Фібоначчі* $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$. *Які можна знайти натуральні числа* $m>1$ *такі, що сума будь-яких m послідовних чисел Фібоначчі із послідовності* $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *ділиться без остачі на m?*

За допомогою комп'ютера знайдено та перевірено відповідні значення *m*, які задовольняють умову цієї задачі. Встановлено, що *m* кратне числу 24.

Актуальність вибраної теми дослідження обумовлена численними застосуваннями послідовності чисел Фібоначчі та їх узагальнень у найрізноманітніших напрямках наукових досліджень, зокрема, вони широко використовуються у математиці, фізиці, філософії, ботаніці, біології, геології, кристалографії, медицині, психології, астрономії, економіці, комп'ютерних науках, мистецтві тощо.

Метою даної науково-дослідницької роботи є вивчення теоретико-числових властивостей послідовності Фібоначчі та окремих її узагальнень, зокрема, подільності суми послідовних її членів.

Об'єкт дослідження: задача про подільність суми послідовних чисел Фібоначчі та окремих її узагальнень.

Предмет дослідження: методи дослідження теоретико-числових властивостей послідовності Фібоначчі та окремих її узагальнень.

Теоретичні відомості. "Liber abacci"("Книга абака"), написана знаменитим італійським математиком Леонардо із Пізи, який відомий більше по своєму прізвиську Фібоначчі (тобто син Боначчі), представляє собою об'ємну працю, яка містить майже всі арифметичні та алгебраїчні відомості того часу і зіграла помітну роль у розвитку математики в Західній Європі впродовж декількох наступних поколінь. Зокрема, у цій книзі розглядалася знаменита "задача про кроликів", яка пов'язана з числовою послідовністю, яка називається послідовністю Фібоначчі, і визначається такими рекурентними співвідношеннями:

$$f_1=1,\ f_2=1,\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1},\ n\geq 2.$$

Числова послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ називається *рекурентною* [4], якщо існує натуральне число *k* та дійсні числа $a_1,a_2,...,a_k$ такі, що, починаючи з деякого номера n і для всіх наступних номерів, виконується рівність:

$$f_{n+k}=a_1 f_{n+k-1}+a_2 f_{n+k-2}+...+a_k f_n .$$

При цьому, число *k* називається *порядком* рекурентної послідовності.

У випадку послідовності Фібоначчі, маємо: $k=2, a_1=a_2=1$.

У науковій роботі ми розглядатимемо деяке узагальнення чисел Фібоначчі, пов'язане із зміною двох початкових значень f_1 та f_2. Зокрема, у випадку, коли $f_1=2$ та $f_2=1$, отримуємо відому послідовність Люка (Франсуа Едуард Анатоль Люка (Lucas), 1842-1891 рр.). Більш детальні та унікальні властивості цієї послідовності, а також досить цікаві аналогії з послідовністю Фібоначчі і переваги застосування послідовності Люка в галузі обчислювальної техніки, зокрема, в теорії кодування, в криптографії, для проектування високонадійних процесорів тощо, можна знайти у роботі [6].

Будь-яке число Фібоначчі можна визначити не тільки рекурсивно, а й безпосередньо, як деяку функцію свого номера.

Теорема 1 (Біне). *Для всіх натуральних чисел* n *є наступна рівність*

$$f_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \qquad (1.1)$$

Формула (1.1) називається *формулою Біне* (по імені математика Жака Біне (1786-1856), який її вивів).

Як бачимо, у формулу (1.1) входять розв'язки квадратного рівняння $x^2=x+1$:

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Теоретико-числові властивості чисел Фібоначчі.

Розглянемо у цьому пункті деякі властивості чисел Фібоначчі, які стосуються їх подільності [1].

Теорема 2. *Число f_n ділиться націло на f_m, тоді і тільки тоді, коли n ділиться націло на m.*

Наслідок.

1) Число Фібоначчі є парним тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 3.

2) Число Фібоначчі ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 4.

3) Число Фібоначчі ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 6.

4) Число Фібоначчі ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 5.

5) Число Фібоначчі ділиться на 7 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 8.

6) Число Фібоначчі ділиться на 16 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 12.

Наведемо ще деякі допоміжні факти із [1]. Мають місце наступні твердження.

Властивість 1. *Для довільного натурального числа m, серед перших* m^2-1 *чисел Фібоначчі знайдеться хоча б одне, яке ділиться на m.*

Позначимо через r_n остачу від ділення числа f_n на m для кожного числа n. Тоді $r_n \equiv f_n (\operatorname{mod} m)$ для всіх чисел n. Через це послідовність остач $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ позначають у літературі ще так: $\{f_n \operatorname{mod} m\}_{n=1}^{+\infty}$. Відомі наступні теореми.

Властивість 2. *Послідовність $\{f_n \operatorname{mod} m\}_{n=1}^{+\infty}$ є періодичною.*

Властивість 3. *Сусідні числа Фібоначчі взаємно прості.*

Властивість 4. *Правильною є рівність:*

$$\left(f_m, f_n\right) = f_{(m,n)}.$$

(тут символом (x, y) позначено найбільший спільний дільник натуральних чисел x та y).

Властивість 5. *Якщо просте число p має вигляд $5t \pm 1$, $t \in \mathbb{N}$, то f_{p-1} ділиться на p. Якщо просте число p має вигляд $5t \pm 2$, то f_{p+1} ділиться на p.*

Наслідок 2. *Якщо p – просте число, яке відмінне від 2 та 5, то $f_{p-1} f_{p+1}$ ділиться на p.*

Доведення сформульованого наслідку випливає безпосередньо із теореми 9, якщо врахувати при цьому, що тільки прості числа 2 та 5 неможливо подати у вигляді $5t \pm 1$ чи $5t \pm 2$.

Сума послідовних чисел фібоначчі

Сума перших послідовних чисел Фібоначчі та і деяких інших послідовностей.

У цьому пункті розглянемо таку задачу:

знайти всі натуральні значення $m > 1$ такі, що виконується подільність $\sum_{k=1}^{m} f_k \vdots m$, де послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ визначається співвідношенням $f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ n \geq 2$, а значення f_1 та f_2 – деякі цілі числа, які можуть змінюватися. Розглянемо приклади обчислень.

1) Нехай $f_1 = 1$ та $f_2 = 1$, тобто розглядаємо послідовність Фібоначчі. У цьому випадку отримуємо такі значення m:

1, 2, 24, 48, 72, 77, 96, 120, 144, 192, 216, 240, 288, 319, 323, 336, 360, 384, 432, 480, 576, 600, 648, 672, 720, 768, 864, 960, 1008, 1080, 1104, 1152, 1200, 1224, 1296, 1320, 1344, 1368, 1440, 1517, 1536, 1680, 1728, 1800, 1920, 1944, 2016, 2064, 2160, 2208, 2304, 2352, 2400, 2448, 2592, 2640, 2688, 2736, 2880, ….

2) Нехай $f_1 = 2$ та $f_2 = 1$. У цьому випадку отримуємо такі значення m:

1, 3, 24, 48, 72, 96, 120, 144, 192, 216, 240, 288, 336, 360, 384, 406, 432, 480, 576, 600, 648, 672, 720, 768, 864, 936, 960, 1008, 1080, 1104, 1152, 1200, 1224, 1296, 1320, 1344, 1368, 1440, 1536, 1680, 1728, 1800, 1920, 1944, 2016, 2160, 2208, 2304, 2352, 2400, 2448, 2592, 2640, 2688, 2736, 2880, 3000, 3024, 3072, 3120, 3240, 3312, 3360, 3456, 3600, 3672, 3720, 3840, 3888, 3960, 4032, 4104, ….

3) Тепер дослідимо початкові значення, які задають послідовність Люка $f_1 = 1$ та $f_2 = 2$, тоді отримуємо такі значення m:

1, 3, 18, 24, 42, 48, 72, 96, 120, 138, 144, 192, 216, 240, 258, 264, 282, 288, 336, 360, 384, 402, 432, 480, 498, 576, 600, 618, 642, 648, 672, 714, 720, 744, 762, 768, 864, 912, 960, 978, 1002, 1008, 1080, 1104, 1152, 1200, 1224, 1296, 1320, 1338, 1344, 1362, 1368, 1440, 1536, 1578, 1584, 1680, 1698, 1728, 1800, 1842, 1920, 1938, 1944, 2016, 2082, 2160, 2202, 2208, 2280, 2298, 2304, 2352, 2394, 2400, 2448, 2592, 2640, 2658, 2688, 2736, 2778, 2802, 2880, 2922, 3000, 3018, 3024, 3072, 3138, 3240, 3282, 3312, 3360, 3378, 3456, 3480, 3522, 3600, 3642, 3648, 3672, 3720, 3840, 3858, 3882, 3888, 3960, 4032, 4098, 4104, 4224, 4320, 4362, 4368, 4416, 4458, 4464, 4512, 4554, 4608, 4674, 4704, 4722, 4800, 4896, 4920, 4938, 4962, 5040, 5178, 5184, 5280, 5298, 5322, 5376, 5400, 5442, 5472, 5520, 5682, 5688, 5760, 5802, 5832, 5898, 6000, 6042, 6048, 6120, 6144, 6378, 6384, 6480, 6498, 6522, 6600, 6618, 6624, ….

Проаналізувавши три наведені випадки, помічаємо, що серед знайдених чисел дуже часто зустрічаються числа, які кратні 24. Тому, у зв'язку із цим можемо висловити здогадку, що, напевно, умову пошукової задачі "про суму послідовних чисел Фібоначчі" задовольняють числа m, які кратні числу 24.

Критерій подільності суми послідовних чисел Фібоначчі на число доданків.

Лема. Нехай $f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots, f_{n+m}, n \geq 0$ – довільні m послідовних чисел Фібоначчі. Тоді виконується рівність:

$$\sum_{k=1}^{m} f_{n+k} = f_{n+m+2} - f_{n+2}. \tag{2.1}$$

Справді, скориставшись рівністю $\sum_{k=1}^{l} f_k = f_{l+2} - 1$, для всіх натуральних чисел l, здійснимо наступні перетворення:

$$\sum_{k=1}^{m} f_{n+k} = f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+m} = \left(f_1 + f_2 + \ldots + f_{n+m}\right) - \left(f_1 + f_2 + \ldots + f_n\right) = \sum_{k=1}^{n+m} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k = \left(f_{n+m+2} - 1\right) - \left(f_{n+2} - 1\right) = f_{n+m+2} - f_{n+2},$$

що й потрібно було встановити.

Тут було використано те, що $\sum_{k=1}^{n+m} f_k = f_{n+m+2} - 1$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 3. *Сума будь-яких m послідовних чисел Фібоначчі кратна m тоді і тільки тоді, коли числа f_m та $f_{m+1} - 1$ кратні m.*

Доведення. Сформульовану теорему можна коротко переформулювати наступним чином:

$$\sum_{k=1}^{m} f_{n+k} \vdots m, n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_m \vdots m, \\ f_{m+1} - 1 \vdots m. \end{cases}$$

Необхідність. Нехай відомо, що для довільного значення $n \geq 0$ виконується подільність $\sum_{k=1}^{m} f_{n+k} \vdots m$. Доведемо, що виконуються умови

$$\begin{cases} f_m \vdots m, \\ f_{m+1} - 1 \vdots m. \end{cases}$$

Покладемо у тотожності (2.1) значення $n = 0$:

$$\sum_{k=1}^{m} f_k = f_{m+2} - f_2 = f_m + f_{m+1} - 1. \quad (2.2)$$

Тут використане те, що $f_{m+2} = f_m + f_{m+1}$ і $f_2 = 1$.

Тепер покладемо у тотожності (2.1) значення $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} f_{k+1} = f_{m+3} - f_3 = f_{m+2} + f_{m+1} - 2 = f_m + 2(f_{m+1} - 1). \quad (2.3)$$

За умовою ліві частини рівностей (2.2) та (2.3) діляться націло на *m*, тому виконуються подільності:

$$\begin{cases} f_m + f_{m+1} - 1 \vdots m, \\ f_m + 2(f_{m+1} - 1) \vdots m, \end{cases} \quad (2.4)$$

а тоді і різниця чисел $(f_m + f_{m+1} - 1) - (f_m + 2(f_{m+1} - 1))$ також ділиться на *m*, тобто $f_{m+1} - 1 \vdots m$. А тоді із (2.4) випливає, що $f_m \vdots m$.

Достатність. Нехай виконуються умови

$$\begin{cases} f_m \vdots m, \\ f_{m+1} - 1 \vdots m. \end{cases}$$

Доведемо, що для всіх $n \geq 0$ виконується подільність $\sum_{k=1}^{m} f_{n+k} \vdots m$. Доведення здійснимо за допомогою методу математичної індукції за числом $n \geq 0$.

База індукції. Нехай $n = 0$. Тоді $\sum_{k=1}^{m} f_{n+k} = \sum_{k=1}^{m} f_k = f_{m+2} - 1 = f_m + (f_{m+1} - 1) \vdots m$, як сума двох чисел, що кратні *m*.

Припущення індукції. Припустимо, що для всіх значень $0 \leq l \leq n$ виконується подільність $\sum_{k=1}^{m} f_{l+k} \vdots m$. Доведемо, що $\sum_{k=1}^{m} f_{n+1+k} \vdots m$.

Скориставшись, зокрема, співвідношенням (2.1), виконаємо наступні перетворення:

$$\sum_{k=1}^{m} f_{n+1+k} = f_{n+1+m+2} - f_{n+1+2} = f_{n+m+3} - f_{n+3} = (f_{n+m+2} + f_{n+m+1}) - (f_{n+2} + f_{n+1}) =$$
$$= (f_{n+m+2} - f_{n+2}) + (f_{n+m+1} - f_{n+1}) = \sum_{k=1}^{m} f_{n+k} + \sum_{k=1}^{m} f_{n-1+k} \vdots m,$$

бо, згідно із припущенням індукції, кожна із сум кратна *m*. Отже, теорему повністю доведено.

Досліджені вище властивості можуть бути використані для розв'язання наступних авторських задач.

Задача № 1. Нехай число Фібоначчі, представлене у десятковій системі числення, має останню цифру рівну *a*. Через скільки елементів послідовності Фібоначчі гарантовано трапиться число, в якому остання цифра теж *a*? Що зміниться, якщо елементи послідовності представити в трійковій системі числення?

Розв'язання можна знайти, знаючи періодичність $r_n \equiv f_n (\mathrm{mod}\, m)$ за модулем 10.

Задача № 2. Знайти номери елементів послідовності Фібоначчі, в яких, гарантовано, останні 2 цифри чисел Фібоначчі записаних у десятковій системі числення будуть повторюватися?

Теоретико-числове обґрунтування періодичності сум Фібоначчі

Завдяки теоремі 3 і лемі питання про подільність сум послідовних чисел Фібоначчі на натуральне число звелося до питання про періодичність елементів з $\{f_n \bmod m\}_{n=1}^{+\infty}$, також цей зв'язок можна пояснити за допомогою формули $\sum_{k=1}^{l} f_k = f_{l+2} - 1$. Тому знайшовши період появи 0 в послідовності $\{f_n \bmod m\}_{n=1}^{+\infty}$ зрозуміємо який період у послідовності $\{f_{n+m+2} - f_{n+2} \bmod m\}_{n=1}^{+\infty}$ з якої виражається послідовна сума чисел Фібоначчі довжини *m*.

Нехай P – множина простих чисел, $\mathrm{T}(m)$ – це період суми послідовних *m* чисел Фібоначчі за модулем *m*, $S(m)$ – значення суми послідовних *m* чисел Фібоначчі зведеної за $\bmod m$. Період послідовності $\{f_{n+m+2} - f_{n+2} \bmod m\}_{n=1}^{+\infty}$ з якої виражається послідовна сума чисел Фібоначчі довжини *m* співпадає з $\mathrm{T}(m)$.

Теоретико-числове пояснення подільності виділених сум Фібоначчі на кількість їх доданків *m* і $\{f_n \bmod m\}_{n=1}^{+\infty}$ грунтується на представленні числа $f_n, n \in N$ за допомогою формули Біне (1.1). Дослідимо порядки у кільці лишків за модулем *m* тобто у Z_m. Для цього спочатку розглянемо випадок $m \in \mathrm{P}$.

Якщо $\sqrt{5}$ є елементом кільця Z_m, тобто існує $r : r^2 \equiv 5(\bmod m)$, де $m \in \mathrm{P}$ і $m \neq 2$, $m \neq 5$, то мультиплікативний порядок елемента f_m по $\bmod p$ є $p-1$ [6]. Маємо

$$f_{p-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\varphi(p)} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\varphi(p)}}{\sqrt{5}} \equiv \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}}{\sqrt{5}} \equiv 0(\bmod p),$$

тому суми Фібоначчі повторюються з періодом $\mathrm{T}(p)$ і саме f_{p-1} ділиться на p тобто є періодичними з періодом $\varphi(p) = p-1$. Наприклад, для $m = 11$ маємо $\mathrm{T}(11) = 10$ – це період повторення його сум за модулем 11 і звичайно має місце подільність $f_{11-1} = 55$ на 11. Тобто у кільці лишків за модулем 11 число 5 є квадратичним лишком, тому період $\mathrm{T}(11) = 10$, тобто $\mathrm{T}(11) = p - 1 = 11 - 1$. Тому у випадку $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$ буде мати місце конгруенція $f_{2p-2} \equiv f_{p-1} \equiv 0(\bmod p)$.

Це так, бо мультиплікативний порядок елемента в Z_p згідно малій теоремі Ферма $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n\varphi(m)} \equiv 1(\bmod m)$. А звідси слідує конгруентність $f_{n\varphi(m)} \equiv 0 \bmod m$ бо для простого $p \in \mathrm{P}$ має місце взаємна простота $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \bmod m\right) = 1$.

При цьому під періодом ми розуміємо не найменше число елементів після якого починається повторення, а кожне таке число. При цьому $\varphi(m)$ [6] не завжди є найменшим періодом. Це пов'язано з тим, що теорема Ейлера лише гарантує $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{\varphi(m)} \equiv 1(\bmod m)$, але порядок числа з Z_m може бути і менше ніж $\varphi(m)$, тобто періодичність пов'язана з мультиплікативним порядком чисел $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ у Z_m.

У випадку $\sqrt{5} \notin Z_m$ і $m \in \mathrm{P}$, період $\mathrm{T}(m) = p^2 - 1$ або є дільником числа $p^2 - 1$. Це так, бо тоді $\sqrt{5}$ належить квадратичному розширенню $F_{p^2} \cong F\left[\sqrt{5}\right]$ кільця Z_p, яке є полем, а порядок мультиплікативної групи поля F_{p^2} рівний $p^2 - 1$ [6].

Для прикладу розглянемо модуль $p = 7$. Число 5 не є квадратичним лишком в Z_7, тому $\mathrm{T}(7)$ є дільником числа 49-1. Справді, $f_{16} = 987 = 141 \cdot 7$ також виявилося, що $\mathrm{T}(7) = 16$, яке є дільником числа $7^2 - 1 = 48$. Це підтверджують вище наведені обчислення.

Ці міркування дозволяють уточнити формулювання ***Теореми 3*** і розширити його для послідовності $\{S(m)\}_{m=1}^{+\infty}$.

При $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$ маємо $\mathrm{T}(p) = p - 1$, а при $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$ маємо період $\mathrm{T}(p) = p^2 - 1$.

Взаємодію періодів за модулями простих чисел, які є множниками у розкладі складеного числа m, ми розглянемо у наступній роботі.

Висновки. У науково-дослідницькій роботі вивчаються теоретико-числові характеристики чисел Фібоначчі та пов'язаних з нею послідовностей. При цьому проведено такі дослідження та отримано наступні результати:

1) Скориставшись періодичністю послідовності остач $\{f_n \bmod m\}_{n=1}^{+\infty}$ чисел Фібоначчі f_n на натуральні числа $m > 1$, у роботі складено таблицю остач перших 30-ти чисел Фібоначчі на $2 \leq m \leq 12$.

2) Доведено відповідну теорему, яку перевірено за допомогою комп'ютера, задачу "сума послідовних чисел Фібоначчі". При цьому знайдено всі значення m, які задовольняють умову даної задачі.

3) Вперше досліджено необхідні і достатні умови періодичності сум Фібоначчі і умови кратності *суми* будь-яких m послідовних чисел Фібоначчі числу її доданків m. Знайдено теоретико-числове обґрунтування періодичності різниць часткових сум послідовності Фібоначчі за модулем p.

Розглянуто цю задачу, зокрема, і для чисел Люка, помічено певну схожість властивостей послідовносей цих сум.

Список використаної літератури

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978. 144 с.
2. Кнут Д. Искусство программирования. Основные алгоритмы. Т. 1 3-е изд. М.: Вильямс, 2006.
3. Лужецький В.А. Високонадійні математичні Фібоначчі-процесори. "УНІВЕРСУМ-Вінниця". 2000. 248 с.
4. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. Популярные лекции по математике. М.: Наука, 1983. 48 с.
5. Найман Э.Л. Малая энциклопедия трейдера. 9-е изд., перераб. и доп. М.: Альпина Бизнес Букс, 2008.
6. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Том 1, Том 2. М.: Мир,. 1988. 430 с.
7. Сороко Е.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
8. Стахов А.П. Металлические пропорции – новые математические константы природы. «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ.14748, 22.03.2008.
9. Spinadel V.W. The metallic means family and forbidden symmetries the metallic means family and forbidden symmetries. «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12603, 18.11.2005.
10. Новосад М.В., Дичка І.А. Числа Люка. Науковий вісник Чернівецького університету. 2009. Вип. 446. С. 11- 15.

References

1. Vorobev N.N. Chisla Fibonachchi. M.: Nauka, 1978. 144 s.
2. Knut D. Iskusstvo programmirovaniya. Osnovnyie algoritmyi. T. 1. 3-e izd. M.: Vilyams, 2006.
3. Luzhetskiy V.A. Visokonadiyni matematichni Fibonachchi-protsesori. “UNIVERSUM-Vinnitsya”. 2000. 248 s.
4. Markushevich A.I. Vozvratnyie posledovatelnosti. Populyarnyie lektsii po matematike. M.: Nauka, 1983. 48 s.
5. Nayman E.L. Malaya entsiklopediya treydera. 9-e izd., pererab. i dop. M.: Alpina Biznes Buks, 2008.
6. Lidl R., Niderrayter G. Konechnyie polya. Tom 1, Tom 2. M.: Mir,. 1988. 430 s.
7. Soroko E.M. Strukturnaya garmoniya sistem. Minsk: Nauka i tehnika, 1984.
8. Stahov A.P. Metallicheskie proportsii novyie matematicheskie konstantyi prirodyi. «Akademiya Trinitarizma», M., El. # 77-6567, publ.14748, 22.03.2008.
9. Spinadel V.W. The metallic means family and forbidden symmetries the metallic means family and forbidden symmetries. «Akademiya Trinitarizma», M., El # 77-6567, publ.12603, 18.11.2005.
10. Novosad M.V., Dichka I.A. Chisla Lyuka. Naukoviy vIsnik ChernIvetskogo unIversitetu 2009. Vip. 446. S.11-15.

THE SUM OF CONSECUTIVE FIBONACCI NUMBERS

R.V. Skuratovskii, D.V. Rudenko

MAUP, lyceum 171, Ukraine

Abstract. *New properties of the sums of linear recursive sequences were proposed in this paper. Particularly, theoretical-numerical characteristics of Fibonacci, Luka and associated with them number sequences are being researched.*

For the first time necessary and sufficient conditions of periodicity of Fibonacci and Luka sums were investigated. Also the conditions of the divisibility of any sum of the consecutive m Fibonacci numbers by their amount.

Scientific work arose around the solution of one of the author's problem, which was offered at the final stage of XIX Ukrainian tournament which was dedicated to professor M. Y. Yadrenko. This tournament had place during October 2015 year in Chernivcy city.

The problem was generalized by the author of this paper after this tournament.

Using computer calculations, we checked the corresponding values that satisfy the condition of the theorem proved by us.

The relevance of the chosen topic of research is caused by numerous applications of the sequence of Fibonacci numbers and their generalizations in a variety of scientific research areas, in particular, they are widely used in mathematics, cryptography biology, geology, crystallography, medicine, psychology, astronomy, economics, computer science, art, etc.

The sequences studied by us have not only a theoretical but also an applied value, so the Luke sequence we studied in our application is used in coding and cryptography. In addition, we consider new sequences of finite sums of successive elements, which in general represent a new sequence. As well as the classical Fibonacci sequence, our linear recurrence sequences will be used in the mathematics itself, for example, Y. Matyaselevich uses the numbers of Fibonacci to solve the known 10th Hilbert problem. Another of our choices for generalization of sequences, namely the sequence of Luke's numbers, is also being investigated in our time [10]. The regularity of the change in the period of the sequence of the imposed sum of successive elements, depending on the quadraticity remainder of the number 5 in Z_p.

The rigorous argumentation is given with the help of the numbers theory theorem.

All statements can be included in the special courses of the curriculum, which is aimed at preparing masters-teachers and also can be used as extracurricular material by club leaders.

All statements can be included in the special courses of the curriculum, which is aimed at preparing masters-teachers and also can be used as extracurricular material by club leaders.

Key words: *linear recursive sequence, Fibonacci sequence and Luke, olympiad tasks, material for circle work.*