Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Яблочніков С.Л., Купцов М.І., Яблочнікова М.С., Купцов І.М. Метод перетворюючої матриці як доказ існування інтегральних многовидів. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 1(15). С. 344-349.

Yablochnikov S., Kuptsov M., Yablochnikova M., Kuptsov I.The Method Of Transforming Matrix For The Evidence Of Integral Manifolds` Existence. Physical and Mathematical Education. 2018. Issue 1(15). P. 344-349.

УДК 517.925.42+517.925.53+517.928.7

С.Л. Яблочніков[1], М.І. Купцов[2], М.С. Яблочнікова[3], І.М. Купцов[3]
[1]*Вінницький соціально-економічний інститут Університету «Україна», Україна*
vvkfek@mail.ru
[2]*Академія права та управління, РФ*
kuptsov_michail@mail.ru
[3]*Московський фізико-технічний інститут, РФ*
vvkfek@mail.ru
DOI 10.31110/2413-1571-2018-015-1-066

МЕТОД ПЕРЕТВОРЮЮЧОЇ МАТРИЦІ ЯК ДОКАЗ ІСНУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ

Анотація. *Авторами успішно вирішено задачу пошуку локального ненульового інтегрального многовиду нелінійної (n+m) – вимірної системи звичайних диференційних рівнянь, права частина якої є періодичною вектор-функцією від незалежної змінної та містить параметр. Загальний підхід до розв'язання вказаного вище класу задач, у свій час, було розроблено Н. Боголюбовим, Ю. Мітропольским та А. Самойленко, котрий, зокрема, передбачав формування функції Гріна. Однак, автори даної публікації, під час практичного вирішення сформульованої вище задачі, прийшли до висновку, що запропонований попередниками загальний підхід, в даному випадку, фактично, реалізувати не можливо. В свою чергу, вони висунули припущення, що для системи диференційних рівнянь, котра досліджується, існує n-вимірний тривіальний інтегральний многовид при будь-яких значеннях параметру, а відповідна лінійна підсистема рівнянь також має m-параметричне сімейство періодичних розв'язків. На думку авторів, це свідчить, зокрема, про те, що лінійній підсистемі рівнянь не притаманна властивість так званої експоненційної дихотомії. Ними також висловлюється припущення стосовно того, що матриця лінійного наближення системи при нульовому значенні параметру, є певною функцією незалежної змінної. Доведення існування інтегрального многовиду авторами статті фактично зведено до пошуку роз'язку операторних рівнянь в просторі обмежених Ліпшиц-неперервних періодичних вектор-функцій. З цією метою, вихідна система звичайних диференційних рівнянь лінеаризується і, в подальшому, до неї застосовується, розроблений, у свій час, Купцовим М. І. та Яблочніковим С. Л. й згодом модифікований ними, метод перетворючої матриці. Зазначений модифікований метод перетворюючої матриці авторами даної статті було поширено, в тому числі, й на окремий випадок відсутності лінійних за параметром членів операторних рівнянь. Крім того, визначені й достатні умови існування в околі стану рівноваги системи n-вимірного ненульового періодичного інтегрального многовиду.*

Ключові слова*: метод перетворюючої матриці, інтегральний многовид, система звичайних диференційних рівнянь, операторне рівняння, зменшення розмірності фазового простору.*

Постановка проблеми. Нехай система звичайних диференційних рівнянь

$$\dot{y} = f(\nu, y, t) \tag{0.1}$$

для будь-яких ν, t має стан рівноваги $y = 0$ та в області Λ її розв'язок існує, а також є єдиним (унікальним). Тут і надалі f, y, ν – $(n+m)$ – вектори, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $f(\nu, y, t+T) \equiv f(\nu, y, t)$, $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$, $\Lambda_1 = \{y : \|y\| \le \Delta_1\} \subset R^{n+m}$, $\Lambda_2 = \{\nu : \|\nu\| \le \Delta_2\} \subset R^{n+m}$, Δ_1, Δ_2 – константи, R^p стандартний евклідовий простір розмірності p та $\|\cdot\|$ – евклідова норма у R^p.

Нехай, заміна змінних

$$y = \Gamma(\varepsilon, x, \varphi, t),\ \nu = \xi(\varepsilon) \tag{0.2}$$

призводить систему рівнянь (0.1) до наступного виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = X(\varepsilon, x, \varphi, t)\cdot x, \\ \dot{\varphi} = \Phi(\varepsilon, x, \varphi, t), \end{cases} \qquad (0.3)$$

де $\Gamma, \xi, \varepsilon -$ $(n+m)-$ вектори, $X -$ $(n\times n)-$ матриця, $x-$ $n-$вектор, $\varphi, \Phi -$ $m-$вектори, $\Gamma(\varepsilon, x, \varphi, t)\neq 0$ при $x\neq 0$, $\Gamma(\varepsilon, 0, \varphi, t)\equiv 0$.

Крім того, вважатимемо, що система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = X(0,0,\varphi, t)\cdot x, \\ \dot{\varphi} = \Phi(0,0,\varphi, t), \end{cases} \qquad (0.4)$$

має $m-$ параметричне сімейство ненульових $kT-$ періодичних розв'язків $x = x(\varphi_0, t), \varphi = \varphi(\varphi_0, t)$.

Будемо також стверджувати, що для системи (0.1) існує *n*-вимірний нетривіальний періодичний інтегральний многовид $\chi(\varphi_0, t)$, якщо для усіх φ_0 є таке значення $\nu_0 = \xi(\varepsilon_0)$ параметру ν, при якому $\dot{\Gamma}(\varepsilon_0, \chi(\varphi_0,t), \varphi^{\chi}(\varphi_0,t), t) \equiv f(\xi(\varepsilon_0), \Gamma(\varepsilon_0, \chi(\varphi_0,t), \varphi^{\chi}(\varphi_0,t), t), t)$. При цьому, $\chi(\varphi_0, t)$ не перетворюється в нуль при будь-яких значеннях φ_0 та t, є $\omega-$ періодичним за компонентами $m-$ вектору φ_0, $kT-$ періодичним по t, де $k-$ натуральне число, $\varphi = \varphi^{\chi}(\varphi_0, t)$, котре визначає інтегральну криву на ньому. Задача існування нетривіального періодичного інтегрального многовиду системи (0.1) в околі її стану рівноваги й вирішується авторами у даній публікації.

Аналіз актуальних досліджень. Загальний підхід до розв'язання такого класу задач, у свій час, було розроблено Н. Боголюбовим, Ю. Мітропольским та А. Самойленко [1–4]. Зокрема, він передбачає формування функції Гріна. Однак, автори даної публікації, під час практичного вирішення сформульованої вище окремої задачі, прийшли до висновку, що такий підхід, в даному випадку, фактично реалізувати не можливо, оскільки система рівнянь (0.3) при усіх значеннях параметру ε має нульовий інтегральний многовид $x=0$, а система (0.4) – $m-$ параметричне сімейство періодичних розв'язків. На нашу думку, цих проблем, цілком, можливо уникнути за рахунок вирішення допоміжного векторного рівняння і здійснення переходу в його окіл [7, 8].

Результати, що представлені в цій статті, отримані авторами шляхом модифікації запропонованого Купцовим М. і Яблочніковим С. в публікації [9] метода перетворюючої матриці. Його застосування, зокрема, дало можливість отримати нові достатні умови існування локального інтегрального многовиду для систем більш загального виду ніж ті, що розглядаються науковцями у публікаціях [10 – 15].

Метою статті є модифікація розробленого авторами у попередніх публікаціях методу перетворюючої матриці для успішного вирішення задач щодо існування нетривіального періодичного інтегрального многовиду системи рівнянь (0.1) в околі стану рівноваги.

Виклад основного матеріалу. Нехай $F(\varphi, t)\in \Omega_1, \varepsilon(\varphi)\in\Omega_2$ – *ω*– періодичні за компонентами вектора *φ* вектор-функції, які обмежені відповідно числами δ_{10} и δ_{20}, задовольняють умовам Ліпшиця:

$$\|F(\varphi_1, t_1) - F(\varphi_2, t_2)\| \le \delta_{11}\|\varphi_1 - \varphi_2\| + \delta_{12}|t_1 - t_2|, \qquad (1.1)$$

$$\|\varepsilon(\varphi_1) - \varepsilon(\varphi_2)\| \le \delta_{21}\|\varphi_1 - \varphi_2\|, \qquad (1.2)$$

й такі, котрі мають відповідну розмірність *n* та *l* (0 < *l* ≤ *n+m*), $F(\varphi, t)$ *kT*– періодична за *t*,

$$\|F(\varphi,t)\| = \left[\sum_{i=1}^{n} \sup_{\substack{\varphi_i\in[0,\omega] \\ t\in[0,kT]}} |F_i(\varphi,t)|\right]^{1/2}, \quad \|\varepsilon(\varphi)\| = \left[\sum_{i=1}^{l} \sup_{\varphi_i\in[0,\omega]} |\varepsilon_i(\varphi)|\right]^{1/2}).$$

Зазначимо, що у випадку застосування до множини Ω_i вказаних вище умов, вони стають опуклими компактами [9, С. 15].

Для роз'язку диференційного рівняння

$$\dot{\varphi} = \Phi(\varepsilon(\varphi_0), F(\varphi_0, t), \varphi, t), \qquad (1.3)$$

котре задовольняє початковим умовам $\varphi(0) = \varphi_0$, застосуємо позначення φ_t^F. Нехай, крім того, $Y_\varepsilon^F(\varphi_0, t)$ – є матрицантом рівняння

$$\dot{x} = X(\varepsilon(\varphi_0), F(\varphi_0, t), \varphi_t^F, t)\cdot x. \qquad (1.4)$$

Тут і надалі $F(\varphi_0, t)\in\Omega_1$, *n+m-l* значення компонентів вектора *ε* вважають такими, що дорівнюють 0, а замість решти *l* значень, у рівняння системи (0.3) підставлені елементи функції $\varepsilon(\varphi_0)\in\Omega_2$.

Визначення. Неособливу функціональну $n\times n-$ матрицю $Q_\varepsilon^F(\varphi_0)$ з постійним визначником, неперервну за усіма своїми змінними та *ω*– періодичну за компонентами вектору φ_0, будемо іменувати перетворюючою матрицею системи (0.3), якщо для матриці

$$(Y_\varepsilon^F(\varphi_0, kT) - I_n)\cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0) \qquad (1.5)$$

існує, принаймні, один ненульовий стовпчик $q_\varepsilon^F(\varphi_0)$. В даному випадку, I_n – одинична $n\times n-$ матриця.

Позначимо $\mathrm{X} = \{x: \|x\|\le\delta_1\}\subset R^n, \mathrm{E} = \{\varepsilon: \|\varepsilon\|\le\delta_2\}\subset R^{n+m}$.

Доведення теореми щодо існування інтегрального многовиду. Тут і далі ми передбачаємо, що праві частини системи (*0.3*) є *ω*– періодичними за компонентами вектора *φ и T*– періодичними за незалежною змінною $t\in R$, неперервні та забезпечують існування і унікальність системи (0.3) в області $R^{m+1} \times \mathrm{X} \times \mathrm{E}$ при досить малих δ_1 *и* δ_2. Інакше кажучи, ми передбачаємо, що заміна змінних (0.2) зберігає властивості існування та унікальності розв'язку системи (0.1).

Візьмемо до уваги систему рівнянь

$$\begin{cases} q_\varepsilon^F(\varphi_0) = 0, \\ \int_0^{kT} \Phi\left(\varepsilon(\varphi_0), F(\varphi_0, t), \varphi_t^F, t\right) dt = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Теорема. Нехай перетворюючу матрицю системи (0.3) можливо побудувати таким чином, що існує число *l* (0 < *l* ≤ n+m) та такий ненульовий стовпчик $q_\varepsilon^F(\varphi_0)$, при яких, для знаходження розв'язку системи (2.1) , достатньо знайти розв'язок певної системи, який є відмінним від (2.1) системи l рівнянь

$S_\varepsilon^F(\varphi_0) = 0$, (2.2)

котра для кожної функції $F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$ є єдиним (унікальним) рішенням $\varepsilon^F(\varphi_0)$ з множини Ω_2.

Крім того, нехай, якщо $t \in [0; kT]$, то виконуються наступні умови:

$$\left\| Y_\varepsilon^F(\varphi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0) \right\| \le r_0, \tag{2.3}$$

$$\left\| Y_\varepsilon^F(\varphi_0^*, t^*) \cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0^*) - Y_\varepsilon^F(\varphi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0) \right\| \le r_1 \left\| \varphi_0^* - \varphi_0 \right\| + r_2 \left| t^* - t \right|. \tag{2.4}$$

Тоді для будь-якого вектору $\varphi_0 \in R^m$ існує таке значення параметру ν, для якого система (0.1) буде мати ненульовий інтегральний многовид в околі стану рівноваги y=0.

Доведення теореми. Оскільки $\varepsilon = \varepsilon^F(\varphi_0)$ є розв'язком системи (2.2), то, відповідно, при $\varepsilon = \varepsilon^F(\varphi_0)$ в тотожність перетворюється також й (2.1). Відповідно, диференційне рівняння (1.4) для кожної функції $F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$ має *kT*– періодичний розв'язок

$$x^F(\varphi_0, t) = Y_\varepsilon^F(\varphi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0) \cdot C, \tag{2.5}$$

де усі елементи сталого *n*– вектору *C* дорівнюють нулю, окрім елементу, що відповідає номеру стовпчику $q_\varepsilon^F(\varphi_0)$, який, в свою чергу, дорівнює *c* (будь-якій сталій). Відсутність особливості перетворюючої матриці забезпечує нетривіальність $x^F(\varphi_0, t)$.

Відповідно до умов (2.3) та (2.4), $x^F(\varphi_0, t)$ задовольняє умовам Ліпшицю зі сталою $r_1 \cdot c$ за змінною φ_0 та $r_2 \cdot c$ за t, обмежено числом $r_0 \cdot c$. Тому, за рахунок зменшення ***c*** цілком можливо забезпечити виконання наступних умов – $x^F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$. Таким чином, ми, фактично, сформували оператор, котрий визначається рівняннями (2.2) та (2.5), до якого, в силу єдності значення $\varepsilon^F(\varphi_0)$ для кожної функції $F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$, можливо застосувати теорему [16, C. 26] (або ж теорему I.1.3 [9, C. 20]). Тому, для цього оператора існує «нерухома» точка $\Psi(\varphi_0, t) = Y_\varepsilon^\Psi(\varphi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^\Psi(\varphi_0) \cdot C$.

Цілком зрозуміло, що при $\varepsilon = \varepsilon^\Psi(\varphi_0)$ функції $\Psi(\varphi_0, t)$, φ_t^Ψ визначають сімейство ненульових *kT*– періодичних розв'язків системи (0.3). Дійсно, для того, що б впевнитись в цьому, достатньо прийняти до уваги перетворення у тотожність (2.1) та здійснити диференціювання $\Psi(\varphi_0, t)$, враховуючи ту обставину, що функція φ_t^Ψ задовольняє (1.3). Для завершення доведення теореми залишається повернутися до системі (0.1) за допомогою заміни (0.2). Отже, $\Psi(\varphi_0, t)$ – шуканий *n*– вимірний нетривіальний періодичний інтегральний многовид системи (0.1). Теорема доведена.

Приклад системи, що задовольняє умовам теореми про існування інтегрального многовиду. В якості ілюстрації практичного використання наведеної вище теореми розглянемо систему спеціального виду, до якої не може бути застосовано жодної з достатніх ознак існування інтегральних многовидів, котрі зазначені у публікаціях [1 –15]. Нехай до системи трьох диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \left[\cos t + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^4 \cdot (1 + \sin^2 t) - \varepsilon_3^4 - y_2^2 \cdot y_3^2\right] \cdot y_1 - \left[\cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + y_2\right] \cdot y_3, \\ \dot{y}_2 = \left[\sin t + \alpha_1(\varepsilon) + 2 y_1 y_3\right] \cdot y_2, \\ \dot{y}_3 = \left[\cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + y_2\right] \cdot y_1 + \left[\cos t + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^4 \cdot (1 + \sin^2 t) - \varepsilon_3^4 - y_2^2 \cdot y_3^2\right] \cdot y_3, \end{cases} \tag{4.1}$$

входить лише одна векторна величина $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$ та $\alpha_i(\varepsilon) = a_{i1} \cdot \varepsilon_1 + a_{i2} \cdot \varepsilon_2 + a_{i3} \cdot \varepsilon_3 + \overline{\alpha}_i(\varepsilon)$, $\overline{\alpha}_i(\varepsilon) = o(\|\varepsilon\|)$, $a_{12} \cdot a_{23} \ne a_{13} \cdot a_{22}$.

Будемо також вважати, що для виразів $\overline{\alpha}_i(\varepsilon)$ виконуються умови Ліпшиця з такими сталими γ_i, для яких $\gamma_i \to 0$ при $\delta_{20} \to 0$. Після заміни змінних $y_1 = x_1 \cdot \cos\varphi,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_1 \cdot \sin\varphi,$ система рівнянь (4.1) перетворюється до наступного виду (0.3):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left[\cos t + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^4 \cdot (1 + \sin^2 t) - \varepsilon_3^4 - x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \sin^2\varphi\right] \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = \left[\sin t + \alpha_1(\varepsilon) + x_1^2 \cdot \sin 2\varphi\right] \cdot x_2, \\ \dot{\varphi} = \cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + x_2. \end{cases}$$

Тоді система (0.4) тут містить три рівняння: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos t \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = \sin t \cdot x_2, \\ \dot{\varphi} = \cos 2t \end{cases}$ та має однопараметричне (*m=1*) сімейство

2π–періодичних розв'язків $x_1 = e^{\sin t}$, $x_2 = e^{1-\cos t}$, $\varphi = \varphi_0 + 0{,}5 \cdot \sin 2t$.

Замість рівнянь (1.3) и (1.4) будуть відповідно розглядатися

$$\dot{\varphi} = \cos 2t + \alpha_2(\varepsilon(\varphi_0)) + F_2(\varphi_0, t), \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\cos t + X_1(\varphi_0, t)] \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = [\sin t + X_2(\varphi_0, t)] \cdot x_2, \end{cases} \tag{4.3}$$

де

$X_1(\varphi_0,t) = \varepsilon_1^2(\varphi_0) - \varepsilon_2^4(\varphi_0)\cdot(1+\sin^2 t) - \varepsilon_3^4(\varphi_0) - F_1^2(\varphi_0,t)\cdot F_2^2(\varphi_0,t)\cdot \sin^2(\varphi_t^F)$, $\quad X_2(\varphi_0,t) = \alpha_1(\varepsilon(\varphi_0)) + F_1^2(\varphi_0,t)\cdot \sin(2\varphi_t^F)$, при цьому $F(\varphi_0,t) = (F_1(\varphi_0,t), F_2(\varphi_0,t))^T$, $\varepsilon(\varphi_0) = (\varepsilon_1(\varphi_0), \varepsilon_2(\varphi_0), \varepsilon_3(\varphi_0))^T$ – 2π–періодчні за φ_0, а $F(\varphi_0,t)$ й за t.

Крім того, завдяки властивостям правих частин системи (4.1), розв'язок φ_t^F рівняння (4.2) обмежений, задовольняє умові Ліпшица за усіма своїми змінними при $t \in [0, 2\pi]$ та 2π–периодичний за початковими даними φ_0. А тоді матрицант рівняння (4.3) є діагональною матрицею

$$Y_\varepsilon^F(\varphi_0, t) = diag\left(\exp\left[\sin t + \int_0^t X_1(\varphi_0,\tau)\,d\tau\right], \exp\left[1 - \cos t + \int_0^t X_2(\varphi_0,\tau)\,d\tau\right]\right)$$

та йому притаманні такі ж самі властивості (див. [9, С. 29]).

Обираючи тепер перетворюючу матрицю $Q_\varepsilon^F(\varphi_0) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, для виразу (1.5) отримуємо

$$\left(Y_\varepsilon^F(\varphi_0, 2\pi) - I_2\right)\cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \exp\left[\int_0^{2\pi} X_1(\varphi_0,\tau)\,d\tau\right] - 1 & 0 \\ \exp\left[\int_0^{2\pi} X_2(\varphi_0,\tau)\,d\tau\right] - 1 & \exp\left[\int_0^{2\pi} X_2(\varphi_0,\tau)\,d\tau\right] - 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді, перебачивши в умовах теореми про існування інтегрального многовиду l=3 та $q_\varepsilon^F(\varphi_0) = \left(\exp\left[\int_0^{2\pi} X_1(\varphi_0,\tau)\,d\tau\right] - 1, \ \exp\left[\int_0^{2\pi} X_2(\varphi_0,\tau)\,d\tau\right] - 1\right)$, для системи (2.1) отримаємо таке:

$$\begin{cases} \exp\left[\int_0^{2\pi} X_1(\varphi_0,\tau)\,d\tau\right] = 1, \\ \exp\left[\int_0^{2\pi} X_2(\varphi_0,\tau)\,d\tau\right] = 1, \\ \alpha_2(\varepsilon(\varphi_0))\cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_2(\varphi_0,\tau)\,d\tau = 0. \end{cases}$$

Тому, в якості системи (2.2) достатньо розглянути систему трьох рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_1(\varphi_0)\cdot\sqrt{2\pi} = \sqrt{\varepsilon_2^4(\varphi_0)\cdot 3\pi + \varepsilon_3^4(\varphi_0)\cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_1^2(\varphi_0,\tau)\cdot F_2^2(\varphi_0,\tau)\cdot \sin^2(\varphi_\tau^F)\,d\tau}, \\ \alpha_1(\varepsilon(\varphi_0))\cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_1^2(\varphi_0,\tau)\cdot\sin(2\varphi_\tau^F)\,d\tau = 0, \\ \alpha_2(\varepsilon(\varphi_0))\cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_2(\varphi_0,\tau)\,d\tau = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

У відповідності до умов $a_{12}\cdot a_{23} \neq a_{13}\cdot a_{22}$ матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ буде неособливою та систему (4.4) можна подати у наступному вигляді:

$$\varepsilon(\varphi_0) = \mathrm{A}^{-1}\cdot y^{F,\varepsilon}(\varphi_0), \tag{4.5}$$

де $y^{F,\varepsilon}(\varphi_0) = \left(y_1^{F,\varepsilon}(\varphi_0), \ y_2^{F,\varepsilon}(\varphi_0), \ y_3^{F,\varepsilon}(\varphi_0)\right)$,

$$y_1^{F,\varepsilon}(\varphi_0) = 1/\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\varepsilon_2^4(\varphi_0)\cdot 3\pi + \varepsilon_3^4(\varphi_0)\cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_1^2(\varphi_0,\tau)\cdot F_2^2(\varphi_0,\tau)\cdot\sin^2(\varphi_\tau^F)\,d\tau},$$

$$y_2^{F,\varepsilon}(\varphi_0) = -\overline{\alpha}_1(\varepsilon(\varphi_0)) - 1/2\pi\cdot\int_0^{2\pi} F_1^2(\varphi_0,\tau)\cdot\sin(2\varphi_\tau^F)\,d\tau, \quad y_3^{F,\varepsilon}(\varphi_0) = -\overline{\alpha}_2(\varepsilon(\varphi_0)) - 1/2\pi\cdot\int_0^{2\pi} F_2(\varphi_0,\tau)\,d\tau.$$

Шляхом зменшення значення δ_{ij} легко впевнитись, що оператор, котрий задає рівняння (4.5), є стискаючим та для кожної функції $F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$ переводить простір Ω_2 в Ω_2. Таким фактом остаточно підтверджується виконання усіх умов теореми та, відповідно, існування локального ненульового інтегрального многовиду системи (4.1).

Висновки. Підсумовуючи усе зазначене вище, зауважимо, що $\alpha_i(\varepsilon)$ можна вибрати таким чином, щоб система алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} \varepsilon_1^2 - 1{,}5 \cdot \varepsilon_2^4 - \varepsilon_3^4 = 0, \\ \alpha_1(\varepsilon) = 0, \\ \alpha_2(\varepsilon) = 0 \end{cases}$ не мала нетривіальних розв'язків, а матриця A залишалася неособливою.

Дійсно, ця умова виконується, наприклад, при $\alpha_1(\varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \alpha_2(\varepsilon) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ та, відповідно, жоден з достатніх ознак існування інтегральних многовидів не тільки наведених у публікаціях [1 – 8], але й [9 – 15] не може бути застосований до системи (4.1).

Список використаних джерел

1. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Львов: Изд-во АН УССР, 1945. 139 с.
2. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
3. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987. 301 с.
4. Самойленко А. М., Теплінський Ю. В., Пасюк К. В. Про існування нескінченновимірних інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь. Нелінійні коливання. 2010. Т. 13, № 2. С. 253–271.
5. Курбаншоев С.З., Нусайриев М.А. Построение оптимальных интегральных многообразий для нелинейных дифференциальных уравнений. Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 11–12. С. 807–812.
6. Щетинина Е. В. Интегральные многообразия быстро-медленных систем и затягивание потери устойчивости. Вестник Самарского государственного университета. 2010. № 6 (80). С. 93-105.
7. Бибиков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: ЛГУ, 1991. 142 с.
8. Волков Д. Ю. Бифуркация инвариантных торов из состояния равновесия при наличии нулевых характеристических чисел. Вестник Ленинградского университета. 1988. Серия 1. №2. С. 102 – 103.
9. Купцов М. И. Существование интегральных многообразий и периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. … к-та физ.-матем. наук / УдГУ. Ижевск, 1997. 133 с.
10. Купцов М. И. Локальное интегральное многообразие систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Дифференциальные уравнения. 1999. Т.35. №11. С. 1579-1580.
11. Купцов М. И. Об условиях существования интегрального многообразия системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешённых относительно производных. Труды средневолжского математического общества. 1999. Т.2, №1. С. 95–96.
12. Купцов М. И. Существование интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №6. С. 855.
13. Купцов М. И., Теняев В.В., Купцов И.М. Об одной модификации метода интегральных многообразий в системах управления. Вестник РГРТУ. 2016. № 55. С. 146–152.
14. Kuptsov M. I. Local integral manifold of a system of differential equations. Differential equations. 1998. vol. 34, no. 7, pp. 1005–1007.
15. Купцов М. І., Яблочніков С.Л. Аспекти застосування методу перетворюючої матриці. Фізико-математична освіта: науковий журнал. 2016. Випуск 1(7). С. 87–95.
16. Терёхин М. Т. Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пос. к спецкурсу. Рязань: РГПИ, 1992. 88 с.

References

1. Bogolyubov N.N. O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoi fizike (About some statistical methods in mathematical physics), Lvov: Akad. Nauk Ukr. Sov. Sots. Resp., 1945, 139 p.
2. Mitropol'skii Yu.A., Lykova O.B. Integral'nye mnogoobraziya v nelineinoi mekhanike (Integral manifolds in nonlinear mechanics), Moscow: Nauka, 1973, 512 p.
3. Samoilenko A.M. Elementy matematicheskoi teorii mnogochastotnykh kolebanii. Invariantnye tory (The elements of mathematical theory of multi frequency vibrations. Invariant tori), Moscow: Nauka, 1987, 301 p.
4. Samoylenko A.M., Teplins'kyy Yu.V., Pasiuk K.V. On the existence of infinite-dimensional invariant tori of nonlinear countable systems of difference-differential equations, Neliniyni kolyvannya, 2010, vol. 13, no. 2, pp. 253–271 (in Ukrainian).
5. Kurbanshoev S.Z., Nusairiev M.A. The construction of optimal integral manifold for the nonlinear differential equations, Doklady Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan, 2014, vol. 57, no. 11–12, pp. 807–812 (in Russian).
6. Shchetinina E.V. Integral manifolds for slow-fast systems and the stability loss delay, Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2010, no. 6 (80), pp. 93–105 (in Russian).
7. Bibikov Yu.N. Mnogochastotnye nelineinye kolebaniya i ikh bifurkatsii (Multi frequent nonlinear vibrations and their bifurcation), Leningrad: Len. Gos. Univ., 1991, 142 p.
8. Volkov D.Yu. Bifurcation of invariant torus fromcondition of equilibrium having zero eigenvalue, Vestnik Leningradskogo universiteta, 1988, vol. 1, no. 2, pp. 102–103 (in Russian).
9. Kuptsov M.I. The existence of integral manifolds and periodic solution of system of ordinary differential equations, Can. Sci. (Phys. – Math.) Dissertation, Izhevsk, 1997, 133 p (in Russian).
10. Kuptsov M.I. Local integral manifold ofdifferential equations` system which depend on the parameter, Differ. Uravn., 1999, vol. 35, no. 11, pp. 1579–1580 (in Russian).

11. Kuptsov M.I. About the conditions of existence of integral manifolds of ordinary differential equations not solved relating theirderivatives, Trudy Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva, 1999. vol. 2, no. 1. pp. 95–96 (in Russian).
12. Kuptsov M.I. The existence of integral manifolds of differential equations` system, Differ. Uravn., 1998, vol. 34, no. 6, pp. 855 (in Russian).
13. Kuptsov M.I., Tenyaev V.V., Kuptsov I.M. Concerning an integrated variety modification method in control systems, Vestnik Ryaz. Gos. Radiotekhnich. Univ., 2016, no. 55, pp. 146-152 (in Russian).
14. Kuptsov M.I. Local integral manifold of a system of differential equations, Differential Equations, 1998, vol. 34, no. 7, pp. 1005–1007.
15. Kuptsov M.I., Yablochnikov S.L. Aspects of the method transforming matrix, Fizyko-matematychna osvita: naukovyy zhurnal, 2016, no. 1(7). pp. 87–95 (in Ukrainian).
16. Terekhin M.T. Periodicheskie resheniya sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii (Periodic solutions of systems of ordinary differential equations), Ryazan: Ryaz. Gos. Ped. Inst., 1992, 88 p.

THE METHOD OF TRANSFORMING MATRIX FOR THE EVIDENCE OF INTEGRAL MANIFOLDS` EXISTENCE

Yablochnikov Sergiy
Vinnitsa socio-economic Institute University "Ukraine"
Kuptsov Mikhail
The Academy of Law Management
Yablochnikova Mariya, Kuptsov Ivan
Moscow Institute of physics and technology

Abstract. *The authors successfully solved the problem of finding a local nonzero integral manifold of a nonlinear (n + m) - dimensional system of ordinary differential equations, the right part of which is a periodic vector function of an independent variable and contains a parameter. The general approach to solving the above-mentioned class of tasks, in its time, was developed by Bogolyubov N., Mitropolsky Y. and Samoilenko A., which, in particular, envisaged the formation of the Green's function. However, the authors of this publication, during the practical solution of the above problem, came to the conclusion that the general approach proposed by the predecessors, in this case, in fact, could not be realized. In turn, they suggested that for the system of differential equations under investigation there is an n-dimensional trivial integral variety for any parameter values, and the corresponding linear subsystem of equations also has an m-parametric family of periodic solutions. According to the authors, this is evidenced, in particular, by the fact that the linear subsystem of equations is not inherent in the property of the so-called exponential dichotomy. They also suggest that the matrix of the linear approximation of a system with a zero value of a parameter is a certain function of an independent variable. The proof of the existence of an integral variety by the authors of the article is actually reduced to the search for the decomposition of operator equations in the space of bounded Lipschitz-continuous periodic vector-valued functions. To this end, the original system of ordinary differential equations is linearized and subsequently applied to it, developed in its time by Kuptsov M. I. and Yablochnikov S. L., and subsequently modified by them, the method of transforming the matrix. The mentioned modified method of transforming the matrix by the authors of this article was extended, including, on a separate case, the absence of linear operator operator parameters in the parameter. In addition, sufficient and sufficient conditions for the existence of an equilibrium state of a system of n-dimensional nonzero periodic integral manifold are established.*

Keywords: *the method of transforming matrix, integral manifold, ordinary differential equations system, operator equation, dimensional reduction of phase space.*