Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Абрамчук В.С., Абрамчук І.В., Петрук Д.О., Пугач О.С., Юзва А.П. Проблема прогнозування в задачах математичного моделювання // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2016. – Випуск 2(8). – С. 9-16.

Abramchuk V., Abramchuk I., Petruk D., Puhach O., Yuzva A. The problem of forecasting in mathematical modeling tasks // Physics and Mathematics Education : scientific journal. – 2016. – Issue 2(8). – P. 9-16.

УДК 519.652

В.С. Абрамчук, Д.О. Петрук, О.С. Пугач, А.П. Юзва
Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського, Україна
І.В. Абрамчук
Вінницький національний технічний університет, Україна
helenpugach@gmail.com

ПРОБЛЕМА ПРОГНОЗУВАННЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Вступ. В різних областях наукових досліджень необхідно розв'язувати проблему вибору математичної моделі прогнозування, корекцію, прийняття управлінських рішень тощо. Особливо ця проблема гостро постала з розвитком теорії катастроф і хаосу [2, 3]. Необхідні нові математичні моделі, з допомогою яких можна досліджувати стійкість запропонованої моделі до різних збурень, ступінь ризику про прийнятті нових проектів (управлінських рішень). Наведемо різні приклади та підходи до задачі прогнозування, щоб потім їх об'єднати спільною метою.

Задача розв'язування звичайних жорстких диференціальних рівнянь (або систем – задача Коші), права частина яких задовольняє умовам існування і єдиності розв'язку [4]. Нехай розв'язок належить простору $C^m[a;b], m \geq 2$. Прогнозований розв'язок будуємо в околі початкової точки $x_0 \in (a;b)$ у вигляді відрізку ряду Тейлора : $y(x) = P_{m-1}(x)$. Зкоректуємо розв'язок методом Адамса-Башфорта [4], інтегруючи праву частину одним з методів чисельного інтегрування з точністю $O(h^n)$, $n \geq m-1$, за даними прогнозу. Виникає проблема стійкості наближеного розв'язку для жорстких диференціальних рівнянь [1].

Розглянемо проблему побудови оптимальних інтерполяційних квадратур за певних критеріїв (найвищої алгебричної точності, вибору оптимальних вузлів, оптимальних вагових коефіцієнтів тощо [4, 5]).

Попередня проблема інтегрування тісно повязана з побудовою інтерполяційних многочленів, похибкою обчислення їх коефіцієнтів [4, 5]. Дослідження форм Морса і Тома стану рівноваги фізичних систем (стійкого або нестійкого) пов'язана з проблемою дослідження квадратичних форм, врахуванням умов стійкості при розв'язуванні диференціальних рівнянь [2]. В економіці, екології, хімічній кінетиці, в процесах горіння, вибухів, землетрусів, деформацій, пошкоджень необхідно розв'язувати одну й туж принципову задачу прогнозування та ступення визначення ризику.

Постановка проблеми. 1. Розробити теорію позиноміальної інтерполяції неперервних або дискретнх функцій.

2. Обгрунтувати умови існування інтерполяційних позиномів.

3. Показати застосованість позиноміальних многочленів.

Основна частина. 1. Найпростіші інтерполяційні позиноми (многочлени однієї змінної з довільними дійсними показниками). Нехай задана сіткова функці даними $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$. Інтерполювати сіткову функцію позиномами:

$\pi_1(x) = A_0 + A_1(x-x_1)(x-x_0+1)^{\alpha}$, $\pi_2(x) = B_0 + B_1(x-x_1)(x_2-x+1)^{\beta}$, $x_0 < x_1 < x_2$, $x_i \in y_i \in R$, $i = 0,1,2.$

Позиноміальна триточкова інтерполяція функції на сітці $\{x_0, x_1, x_2\}$, $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$, за умови, що середня швидкість зміни функції на півпроміжках $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ одного знаку. Нехай позином заданий формулою [1]

$$\pi_1(x) = A_0 + A_1(x - x_0 + 1)^{\alpha}(x - x_1),\ A_0 = y_1,\ A_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},\ \alpha = \frac{\ln\dfrac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0}}{\ln(1+h)}, \quad (1)$$

$$\pi_2(x) = B_0 + B_1(x_2 - x + 1)^{\beta}(x - x_1),\ B_0 = y_1,\ B_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ \beta = \frac{\ln\dfrac{y_1 - y_0}{y_2 - y_1}}{\ln(1+h)} = -\alpha.$$

де $h = x_2 - x_0$.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна і монотонна на $[a;b]$ то позиноми $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$ визначені на сітці $\{x_0, x_1, x_2\}$, $[x_0; x_2] \subset [a;b]$, існують і їх параметри визначаються однозначно над полем дійсних чисел, $\beta = -\alpha$.

Доведення. Приймемо для однозначності $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$.

Маємо: $x = x_1$, $A_0 = y_1$, $B_0 = y_1$; $x = x_0$ (для $\pi_1(x)$), $A_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $x = x_2$ (для $\pi_2(x)$), $B_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $x = x_2$ (для $\pi_1(x)$), $A_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Big/ \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = (1+h)^{\alpha}$, $h = x_2 - x_0$; $x = x_0$ (для $\pi_2(x)$), $B_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Big/ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (1+h)^{\beta}$. Оскільки $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = \frac{h}{2}$, то вирази A_2, B_2 спростяться: $A_2 = (y_2 - y_1)/(y_1 - y_0)$, $B_2 = (y_1 - y_0)/(y_2 - y_1)$.

За умовою інтерполююча функція монотонна, тому A_2, B_2 є додатними числами (прирости функцій одного знаку). З форми запису виразів α, β випливає, що $\beta = -\alpha$, $\alpha = \frac{\ln A_2}{\ln(1+h)}$, $\beta = \frac{\ln B_2}{\ln(1+h)}$.

Підставивши значення A_2, B_2 дістанемо формули (1). Доведення завершено.

Параметр α (аналогічно β) вказує на логарифмічну швидкість зміни функції на переході від одного півпроміжка до іншого по відношенню до логарифмічної довжини проміжка, зміщеної на одиницю. За допомогою значення параметра α можна судити про швидкість затухання процесу, якщо $0 < \alpha + 1 < 1$, або про наближення до катастрофи (розриву функції), якщо $\alpha + 1 < 0$.

Порівняємо позиномальну інтерполяцію з триточковою параболічною на сітці $\{x_0, x_1, x_2\}$ $P_2(x) = C_0 + C_1(x - x_1) + C_2(x - x_1)^2$: $C_0 = y_1$, $C_1 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$, $C_2 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2/2}$.

Параболічна інтерполяція визначає швидкість зміни функції на всьому проміжку лише за рахунок коефіцієнтів і не визначає порядку зміни функції при переході від одного півпроміжка до іншого.

Тестовий приклад погано зумовленої функції

$$y = f(x) = \frac{\ln x}{x^2},\ x \in [e^{-2}; e^2],\ \int_{x_0}^{x_2} \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}(1 + \ln x)\Big|_{x_0}^{x_2}.$$

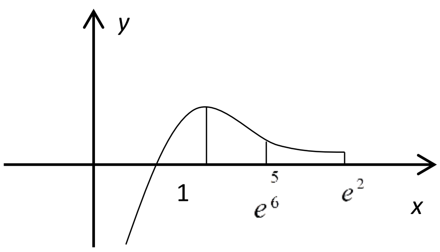

Рис. 1

Проміжок $[e^{-2}; e^2]$ розіб'ємо на три проміжки $[e^{-2}; e^{0,5}]$, $[e^{0,5}; e^{\frac{5}{6}}]$, $[e^{\frac{5}{6}}; e^2]$. На першому проміжку функція сильно зростає від значення –109 до значення 0,18393972; на проміжку $[e^{0,5}; e^{\frac{5}{6}}]$ функція монотонно спадає (опукла вгору); на проміжку $[e^{\frac{5}{6}}; e^2]$ - монотонно спадає, але опукла вниз (рис. 1)

На кожному з цих проміжків показник α приймає рівні значення.

1) $x \in [e^{-2}; e^{0,5}]$, $x_0 = e^{-2} = 0{,}135335283$, $x_2 = e^{0,5} = 1{,}648721271$,

$x_1 = \dfrac{x_0 + x_2}{2} = 0{,}892028277$, $y_0 = -109{,}1963001$,

$y_2 = 0{,}18393972$, $y_1 = -0{,}143591016$, $y_1 - y_0 = 109{,}0527091$, $y_2 - y_1 = 0{,}327530736$,

$$h = 1{,}513385987,\ \alpha = \frac{\ln \dfrac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0}}{\ln(1+h)} = \frac{-5{,}808004713}{0.921630842} = -6{,}301877545$$

2) $x \in [e^{0,5}; e^{\frac{5}{6}}]$, $\alpha = 1{,}174107023$

3) $x \in [e^{\frac{5}{6}}; e^{2}]$, $\alpha = -0{,}598507395$

Коефіцієнти позіномальної інтерполяції функції $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ на кожному проміжку розбиття

1) $x \in [e^{-2}; e^{0,5}]$, $A_0 = y_1 = -0{,}143591016$, $A_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 144{,}1175087;$

2) $x \in [e^{0,5}; e^{\frac{5}{6}}]$, $A_0 = y_1 = 0{,}174483852$, $A_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -0{,}029056346;$

3) $x \in [e^{\frac{5}{6}}; e^{2}]$, $A_0 = y_1 = 0{,}067220688$, $A_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -0{,}035445843.$

2. Позіноміальні квадратурні формули. Нехай функція $y = f(x)$, $f(x) \in C[a;b]$, $[x_0; x_2] \subset [a;b]$, інтерполюється позіномом $\pi_1(x)$. Тоді застосувавши метод інтегрування частинами, дістанемо

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \pi_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} (A_0 + A_1(x - x_0 + 1)^{\alpha}(x - x_1)dx = y_1 h + \frac{1}{\alpha+1}\left[(1+h)^{\alpha+1}\left(\frac{h}{2} - \frac{1+h}{\alpha+2}\right) + \frac{h}{2} + \frac{1}{\alpha+2}\right].$$

Позначимо $1 + h = e^{\ln(1+h)}$, матимемо

$$(1+h)^{\alpha} = e^{\ln(1+h)\cdot\frac{\ln\frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0}}{\ln(1+h)}} = e^{\ln\frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0}} = \frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0}.$$

Отже, $$I = y_1 h + \frac{1}{\alpha+1}\frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0}\left[(1+h)\left(\frac{h}{2} - \frac{1+h}{\alpha+1}\right)\frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0} + \frac{h}{2} + \frac{1}{\alpha+2}\right]. \qquad (2)$$

Застосуємо формулу (2) для обчислення визначеного інтегралу, маємо $\int_{e^{-2}}^{e^{0,5}} \pi_1(x)dx = -14{,}74243864$ – за позіномітальною квадратурною формулою, $S = \dfrac{h}{6}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) = -27{,}64116884$ – за квадратурною формулою Сімпсона, точне значення $\int_{e^{-2}}^{e^{0,5}} \dfrac{\ln x}{x^2}dx = -8{,}2989$

Висновок. Якщо функція $y = f(x)$ є погано зумовленою $(1 + \alpha < 0)$, то позіноміальна квадратура має перевагу перед квадратурою Сімпсона.

3. Адаптивні квадратурні формули. Адаптивні квадратурні формули враховують рельєф зміни кривої підінтегральної функції на проміжках розбиття, щоб зменшити кількість обчислень значень функції і збільшити точність квадратурних формул на всьому проміжку інтегрування. Однією з таких адаптивних формул є формула на основі квадратурної формули Сімпсона:

$$S_h = \int_{x_0}^{x_2} (C_0 + C_1(x - x_1) + C_2(x - x_1)^2)dx = C_0 h + C_2 \left.\frac{(x - x_1)^3}{3}\right|_{x_0}^{x_2} = \qquad (3)$$

$$= \frac{h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Обчислення проводиться на всьому проміжку з кроком h та на підінтевалах з кроком $\frac{h}{2}$, розбиваючи проміжок $[x_0;x_2]$ навпіл, дістанемо $S^{(1)}_{\frac{h}{2}}+S^{(2)}_{\frac{h}{2}}=S$, де точність формули S дорівнює $O(\frac{h^5}{16})$ [4]. Якщо $\frac{1}{10}\left|S^{(1)}_{\frac{h}{2}}+S^{(2)}_{\frac{h}{2}}-S_h\right|<\varepsilon$, де $S^{(1)}_{\frac{h}{2}}$ – значення квадратури Сімпсона на першому підінтервалі, а $S^{(2)}_{\frac{h}{2}}$ на другому, ε – задана похибка, то за наближене значення інтегралу приймається $\int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)\approx S^{(1)}_{\frac{h}{2}}+S^{(2)}_{\frac{h}{2}}$ і процес продовжується.

Якщо умова не виконується, то підінтервали розбиваються навпіл, повторюють обчислення з похибкою $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}$ і т.д. Метод може "провалитися", якщо існує такий вузький інтервал, на якому функція швидко змінюється [5].

4. Ермітова позиноміальна двоточкова інтерполяція $E_1(x)=\pi_1(x)$. Нехай на проміжку $[x_0;x_1]$ виконана позиноміальна інтерполяція $\pi_1(x)$ і нехай підінтегральна функція $y=f(x)$ є неперервною разом з першою похідною. Позиноми Ерміта задамо у формі:

$$E_1(x)=A_0+A_1(x-x_1)(x-x_0+1)^{\alpha} \tag{4}$$

Праметри A_0, A_1, α знайдемо з умови інтерполяції (x_0,y_0,y'_0), (x_1,y_1) на проміжку $[x_0,x_1]$, $x_1=\frac{x_0+x_2}{2}$:

$A_0=y_1$, $x=x_0\Rightarrow A_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$;

$$f'(x_0)=A_1(\alpha(x-x_0+1)^{\alpha-1}(x-x_1)+(x-x_0+1)^{\alpha})\Big|_{x_0}=A_1(\alpha(x_0-x_1)-1\Rightarrow$$

$$1-\frac{f'(x_0)}{A_1}=\alpha\frac{h}{2},$$

$$1-\frac{1}{2}h\frac{f'(x_0)}{y_1-y_0}=\frac{1}{2}h\cdot\alpha,\ \frac{h}{2}=x_1-x_0,\ \alpha=\alpha^E.$$

Ермітів позином $E_1(x)$ і інтерполяційний позином вибираються за однаковою формою $E_1(x)=\pi_1(x)=A_0+A_1(x-x_0+1)^{\alpha}(x-x_1)$, але інтерполяційний позином обчислюється з умови: задана сітка $(x_0,x_1=x_0+\frac{h}{2},x_2=x_0+h)$ і значення функції у вузлах сітки $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $y=f(x_2)$. Ермітів позином будується з використанням двох вузлів $(x_0,x_1=x_0+\frac{h}{2})$ і значень $y_0=f(x_0)$, $y'_0=f'(x_0)$, $y_1=f(x_1)$. *Параметри інтерполяційного позинома:* $A^I_0=y_1$, $A^I_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, $\alpha^I=\ln\frac{y_2-y_1}{y_1-y_0}/\ln(1+h)$.

Параметри ермітового позинома:

$$A^E_0=y_1,\ A^E_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\ \alpha^E=(1-\frac{1}{2}h\frac{f'(x_0)}{y_1-y_0})/2, \tag{5}$$

отже $A^E_0=A^I_0$, $A^E_1=A^I_1$.

Якщо $\alpha^I\approx\alpha^E$, то крок h є прогнозованим і інтеграл обчислюється за формулою (2).

Теорема 2 . Якщо $f(x)\in C^1[a;b]$ і функція $y=f(x)$ інтерполюється позиномом $E_1(x)$ на сітці $\{x_0,x_1,x_2\}$, $x_1=\frac{x_0+x_2}{2}$, $x_0<x_1<x_2$, за даними $y_0=f'(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $y_1\neq y_0$, то ермітів позином існує і єдиний.

Задамо деяку послідовність кроків, наприклад, $h^{(m)}=1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},...,\frac{1}{m}.$ Якщо для деякого найбільшого значення $h_i\in(h^{(m)})$ виконується критерій $\alpha^I\approx\alpha^E$, то підінтервал $[a_k;b_k]$ приймається і обчислюється значення інтеграла за позиноміальною формулою (2) або формулою Сімпсона .

Виконаємо розбиття проміжка $[a_0;b_0]=[e^{-2};e^{0,5}]$, на якому функція $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$ погано зумовлена. Результати обчислень наведені у табл.1.

Таблиця 1

h_k	a_k	$c_k=\dfrac{a_k+b_k}{2}$	b_k	$\alpha_k^{\ I}$	$\alpha_k^{\ E}$
1	0.135335283	0.892028276	1.648721271	-6.301877545	-17.17592347
2	0.135335283	0.513681779	0.892028276	-6.748364624	-16.26674426
3	0.135335283	0.324508531	0.513681779	-7.161531879	-15.19060588
4	0.135335283	0.229921907	0.324508531	-8.99804994	-14.211711
5	0.135335283	0.182628595	0.229921907	-10.19376503	-13.50367434
6	0.135335283	0.158981939	0.182628595	-11.13837407	-13.06776847

Висновок. Шість кроків достатньо, щоб розбити проміжок $[e^{-2};e^{0,5}]$, на якому функція змінює свою швидкість від $f'(e^{-2})=2017.143967$ до $f'(e^{0.5})=0$, на підінтервали, на яких можна застосувати позіноміальні квадратури.

Обгрунтуємо, що при $h\to 0$, $\alpha^I\to\alpha^E$. Має місце лема.

Лема. Якщо функція $y=f(x)\in C^m[a;b], m=3$ і $f'(x)\neq 0$, то

$$\lim_{h\to 0}\alpha^I=\lim_{h\to 0}\alpha^E=\frac{1}{2}\frac{y^{(2)}(c)}{y^{(1)}(c)}, \tag{5}$$

де $c=\dfrac{x_0+x_2}{2}$, $[x_0;x_2]\subset[a;b]$ $y^{(1)}(c)=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=c}$, $y^{(2)}(c)=\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=c}$.

Доведення

$$\alpha_0^I=\lim_{h\to 0}\ln\frac{y_2-y_1}{y_1-y_0}/\ln(1+h)=\lim_{h\to 0}\ln\frac{y(c+\frac{h}{2})-y(c)}{y(c)-y(c-\frac{h}{2})}/h,\quad h=x_2-x_0.$$

Розкладемо вираз $\dfrac{y(c+\frac{h}{2})-y(c)}{y(c)-y(c-\frac{h}{2})}$ у відрізок ряду Тейлора в околі точки $x=c$:

$$\frac{y(c+\frac{h}{2})-y(c)}{y(c)-y(c-\frac{h}{2})}=\frac{y'(c)\frac{h}{2}+\frac{y''(c)}{2!}(\frac{h}{2})^2+...+O_1(h^m)}{y'(c)\frac{h}{2}-\frac{y''(c)}{2!}(\frac{h}{2})^2+...+O_2(h^m)}=1+\frac{y''(c)}{y'(c)}\frac{h}{2}+O_3(h^3)$$

і скористаємось розкладом функції $\ln(1+x)$ в околі точки $x=0$,

$\ln(1+\dfrac{y''(c)}{y'(c)}\dfrac{h}{2}+O_3(h^3))=\dfrac{y''(c)}{y'(c)}\cdot\dfrac{h}{2}+O_4(h^3)$. Звідси випливає істинність формули $\lim\limits_{h\to 0}\alpha^I=\dfrac{1}{2}\dfrac{y''(c)}{y'(c)}$.

Доведемо праву частину формули (6)

$$\lim_{h\to 0}\alpha^E=\lim_{h\to 0}(1-\frac{y'(x_0)}{y_1-y_0}\cdot\frac{h}{2})=\frac{2}{h}(1-\frac{y'(c)-\frac{y''(c)}{1!}\frac{h}{2}+\frac{y'''(c)}{2!}(\frac{h}{2})^2+O_1(h^3)}{y'(c)-\frac{y''(c)}{1!}(\frac{h}{2})+O_2(h^3)})=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{y''(c)}{y'(c)}+O(h).$$

Звідси випливає істинність правої частини формули (6) при переході до границі при $h\to 0$. Доведення леми завершене.

5. Задача про рівновагу динамічної системи. Ступінь ризику (стійкості). В роботах [Морс, Том, Гілмор] поведінка k – параметричної сім'ї потенціальної функції $V(\vec{x},\vec{c})$, $\vec{x}\in R^n$ вектор координат, $\vec{c}\in R^k$ вектор параметрів може бути описана наступними формами [2]:

– якщо $\nabla V\neq 0$ в околі точки $(\vec{x}_0,\vec{c}_0)$, то поведінка функції V може бути описана з використанням теореми про існування неявної функції;

– якщо $\nabla V = 0$, але $\det V_{ij} \neq 0$ (V_{ij} – матриця стійкості, матриця складена з других частинних похідних функції V у точці $(\vec{x}_0, \vec{c}_0)$), то функція може бути приведена до канонічної форми Морса ($V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, λ_i – власні значення матриці стійкості V_{ij});

– якщо $\Delta V = 0$ і $\det V_{ij} = 0$, то використовується канонічна форма Тома ($V = CG(l) = \sum_{i=l+1}^{n} \lambda_i y_i^2$, $CG(l)$ – росток катастроф, визначений через l нульових власних значень $\lambda_1(\vec{c}_0) = ... = \lambda_l(\vec{c}_0) = 0$, $\vec{x}^{(0)}$ – вироджена критична точка).

У відповідності до цієї моделі стан рівноваги системи може бути стійким – локальний мінімум, нестійким – локальний максимум або сідлова точка (точка оптимальної стратегії економічної діяльності (мінімальні затрати – максимальний прибуток)). Виникає проблемна задача, як управляти динамічним процесом в умовах флуктації, щоб система весь час знаходилась в умовах стійкості. Тобто за дискретними значеннями спостережень (обчислень) деякої характеристики (сукупності характеристик) прогнозувати ступінь стійкості (або ступінь ризику до флуктацій). Ця задача є задачею як сьогодення так і на перспективу у зв'язку з новими технічними та технологічними конструкціями, матеріалами, новими структурами в області економіки [3]. Економічні процеси розглядаються, не як статичні структури, а як процеси розвитку, як свого роду еволюція [3]. Індустріальне суспільство проходить у своєму розвитку проходить через фози благополуччя і депресії (теорія Готфіда Хеберлера). Існують не лише випадки максимальної стійкості, досягнутої укріпленням економічних зв'язків, а й при укріпленні і посиленні економічних зв'язків можливі швидкі втрати стійкості, що є джерелом кризисних явищ і катастроф. Тобто умови стійкості без прогнозування і управління можуть привести в силу суспільно-політичних і природних флуктацій до різних стадій економічного розвитку [3]. Текстовий приклад математичної характеристики – функції $y = \ln x / x^2$ в околі критичної точки $x = e^{0,5}$ є прикладом того, як від вибраного напрямку (стратегії) можуть різко змінюватись поведінка функції. Це вимагає введення для таких погано зумовлених функцій ступеня швидкості зміни функції (показника степеня) при переході від одного проміжка спостереження даних до іншого (у загальному, не лише від значень параметрів, а й від обраного напрямку).

6. Позиноміальні інтерполяційні многочлени багатьох змінних. Ступінь ризику. Якщо параметрів управляння є більше одного і характеристика $f(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)^T$, що описує процес є погано зумовленою в одному або в декількох напрямках в околі точки $\vec{x}_0$, то необхідно розвинути теорію інтерполяційних багатомісних позиномів.

Домустимо, що $f(\vec{x})$ задана на деякому прямокутному паралелепіпеді і погано зумовлена лише в одному напрямку по змінній x_1. Нехай інтерполяція виконується на сітці $(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ за заданими значеннями $\vec{z}_i = f(\vec{x}_i)$, $i = 0,1,2$, і, нехай функція монотонна по змінні x_1 у заданому напрямку. Виконаємо по змінній $x = x_1$ позиноміальну інтерполяцію для фіксованих значень параметрів $x_2, ..., x_m$ на заданій сітці:

$$\pi^{(i)}(x_1, x_2^{(0)}, ..., x_m^{(0)}) = A_0^{(i)} + A_1^{(i)}(x - x_1)(x - x_0 + 1)^{\alpha_i},\ i \in [1; 3^{m-1}].$$

Оскільки функція $z = f(\vec{x})$ монотонна по змінній x_1 у заданому напрямку, то параметри $A_0^{(i)}, A_1^{(i)}, \alpha_i$ визначаються однозначно (теорема 1).

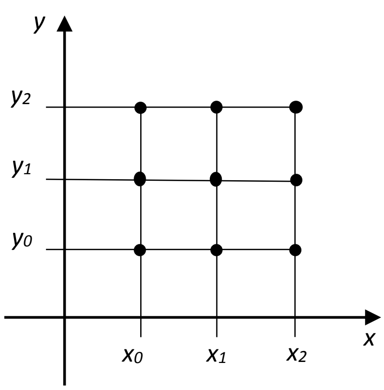

Рис. 2

Позначимо через L триточковий інтерполяційний оператор Лапласа, $L(\delta) = B_0 + B_1(\delta - \delta_1) + B_2(\delta - \delta_1)(\delta - \delta_2)$ однієї змінної δ, що виконує інтерполяцію функції $\varphi(\delta)$ на сітці $\delta_0 < \delta_1 < \delta_2$ за даними $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$:

$$B_0 = \varphi_1,\ B_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\delta_2 - \delta_1},\ B_2 = \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\delta_2 - \delta_1} - \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\delta_1 - \delta_0}\right) / (\delta_2 - \delta_0).$$

Послідовно застосуємо оператор Лапласа для кожної змінної $x_2, ..., x_m$. Пояснимо цей процес для сітки простору R^2 (рис. 2). Позначимо

$\pi^{(1)}(x, y_0) = \varphi_0$, $\pi^{(2)}(x, y_1) = \varphi_1$, $\pi^{(3)}(x, y_2) = \varphi_2$ і зшиємо позиноми $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}$, $\pi^{(3)}$ по змінній y:

$\pi(x, y) = B_0 + B_1(y - y_1) + B_2(y - y_1)(y - y_2)$ $B_0 = \pi^{(0)}(x, y_0) = \varphi_0$,

$$B_1 = \frac{\pi^{(2)}(x,y_2) - \pi^{(1)}(x,y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{y_2 - y_1},$$
$$B_2 = \left(\frac{\pi^{(3)}(x,y_2) - \pi^{(2)}(x,y_1)}{y_2 - y_1} - \frac{\pi^{(2)}(x,y_1) - \pi^{(1)}(x,y_0)}{y_2 - y_0} \right) / (y_2 - y_0) =$$
$$= \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{y_2 - y_1} - \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{y_1 - y_0} \right) / (y_2 - y_0)$$

Ступінь ризику – показник $\min(\alpha_i + 1 + 2)$, $i = 1,2,3.$ Таким чином, якщо ризик в основному залежить від одного параметра керування, то наявність іншого параметра, що не має ризику, демфує (сповільнює) ризик. Це відповідає теорії катастроф [2]. Проте, якщо зміна двох параметрів може визивати ризик, то загальна модель може підвищити ступінь наближення до катастрофи. У цьому випадку необхідно позіном $\pi(x,y)$ модифікувати. Нехай визначені позіноми $\pi^{(i)}(x, y_{i-1})$, $i = 1,2,3.$ Визначимо параметри $\beta^{(i)}$ позіномів від змінної y:

$$\Phi^{(i)}(y, x_{j-1}) = C_0^{(i)} + C_1^{(i)}(y - y_1) + C_2^{(i)}(y - y_1)(y - y_0 + 1)^{\beta_i}$$

Виберемо $\min(\beta_i + 1) = \beta_0$, $i = 1,2,3.$

Якщо $\beta_0 < 0$, тобто існує ризик по другій змінній, то оператор Лапласа модифікуємо:

$$\pi(x,y) = D_0 + D_1(y - y_1) + D_2(y - y_1)(y - y_2)(y - y_0 + 1)^{\beta_0},$$
$$D_0 = \varphi_1 = B_0, \; D_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{y_2 - y_1} = B_1, \; D_2(y_2 - y_0 + 1)^{\beta_0} = B_2.$$

Тоді ступінь ризику буде визначатись показником $\min(\alpha_i + \beta_0 + 3)$, $i = 1,2,3.$

Перехід до змінної x_3 є рекурентною (тензорною) операцією, виконаною за допомогою оператора Лапласа над позіномами $\pi^{(1)}(x,y)$, $\pi^{(2)}(x,y)$, $\pi^{(3)}(x,y)$.

Позіноміальна інтерполяція погано зумовленої функції багатьох змінних дозволяє обчислювати кратні інтеграли неперервних функцій на прямокутному паралелепіпеді. Загальний підсумок сформулюємо в теоремі.

Теорема 3. Якщо функція $z = f(x_1,...,x_m)$, $m \geq 2$ неперервна на замкненому паралелепіпеді $D = \{\vec{x} : x_0^{(i)} \leq x_1^{(i)} \leq x_2^{(i)}, i = 1,...m\}$ і погано зумовлена по одній змінній x_1, по якій вона монотонна (або по $l \leq m$ змінним, по яким вона монотонна), то інтерполяційний позіном $\pi(\vec{x})$ Лагранжевого типу на сітці з 3^m вузлами існує.

Для єдиності позінома багатьох змінних необхідно обмежити умови задання функції, що інтерполюється.

Список використаних джерел

1. Абрамчук В.С. Наближене інтегрування жорстких задач / В. С. Абрамчук, І. В. Абрамчук // Матиматичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. – Кам'янець-Подільський національний університет, 2012. – №7. – 292 с. / С. 3-17.
2. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. В 2-х книгах. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 350 с. (кн. 1).
3. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. Пер. с англ./ В. Б. Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
4. Мэтьюз Дж. Численные методы. Использование MATLAB. Пер. с англ. / Дж. Мэтьюз, Ф. Куртис. – М.: Вильямс, 2001. – 720 с.
5. Сухарев А. Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа / А. Г. Сухарев. – М.: Наука, 1989. – 304 с.

Анотація. Абрамчук В.С., Абрамчук І.В., Петрук Д.О., Пугач О.С., Юзва А.П. Проблема прогнозування в задачах математичного моделювання.

У статті описаний двоточковий і триточковий метод позіноміальної інтерполяції для інтегрування погано зумовлених функцій, визначення ступення ризику. Розроблено теорію позіноміальної інтерполяції неперервних або дискретнх функцій. Обгрунтовано умови існування інтерполяційних позіномів. Продемонстровано застосовуваність позіноміальних многочленів. Знайшли умови існування Лагранжевого типу позіному на сітці 3^m*. Дійшли до висновку, що для єдності позінома багатьох змінних необхідно обмежити умови задання функції, що інтерполюється.*

Ключові слова: *позіном, інтерполяція, погано зумовлена функція, інтегрування, ступінь ризику, рівновага динамічної системи.*

Анотация. ***Абрамчук В.С., Абрамчук И.В., Петрук Д.О., Пугач Е.С., Юзва А.П. Проблема прогнозирования в задачах математического моделирования*.**

В статье описан двухточечный и трехточечный метод позиномиальной интерполяции для интегрирования плохо обусловленных функций, определения степени риска. Разработана теория позиномиальной интерполяции непрерывных или дискретнх функций. Обоснованно условия существования интерполяционных позиномов. Продемонстрировано применимость позиномиальних многочленов. Нашли условия существования Лагранжевого типа позинома на сетке 3^m*. Пришли к выводу, что для единства полинома многих переменных необходимо ограничить условия задания интерполированной функции.*

Ключевые слова: *Позином, интерполяция, плохо обусловлена функция, интегрирования, степень риска, равновесие динамической системы.*

Abstract. Abramchuk V.S., Abramchuk I.V., Petruk D.O., Puhach O.S., Yuzva A.P. The problem of forecasting in tasks of mathematical modeling.

This article describes the two-point and three-point interpolation method for integrating pozinomialnoy ill-conditioned function, determine the degree of risk. The theory of interpolation of continuous or pozinomialnoy diskretnh functions. Reasonably conditions for the existence of interpolation pozinomov. It demonstrated the applicability pozinomialnih polynomials. They found the conditions of existence of Lagrangian type pozinoma on the grid. Concluded that the unity of a polynomial in several variables necessary to limit the terms of the job interpolated function.

Keywords: *pozinom, interpolation, function poorly conditioned, integration, integration risk, balance of dynamical system.*