Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Семенець С.П. Навчально-теоретичні задачі з математики: моделювання процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2016. – Випуск 4(10). – С. 112-116.

Semenets S.P. Educational-theoretical problems in mathematics: modeling the process of solving applied problems using definite integral // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2016. – Issue 4(10). – P. 112-116.

УДК 51(07)

С.П. Семенець
Житомирський державний університет імені Івана Франка, Україна
Serqij.Semenets@zu.edu.ua

НАВЧАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧНІ ЗАДАЧІ З МАТЕМАТИКИ: МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Постановка проблеми. Процеси демократизації, гуманізації, європейської та міжнародної інтеграції детермінують необхідність розроблення моделі математичної освіти, в якій запроваджуються розвивальні технології навчання, створюються умови для самоосвіти і саморозвитку особистості, забезпечується всебічне розкриття її здібностей і обдарувань. Спрямованість математичної освіти на особистісний розвиток відповідає сучасним соціальним запитам на культурноосвічену та культуротворчу особистість. З іншого боку, особистісно-розвивальна освітня парадигма слугує розв'язанню низки *протиріч у чинній системі математичної підготовки* між:

– інформаційним перевантаженням процесу навчання математики та зорієнтованістю на запам'ятовування та відтворення за наперед заданим (готовим) зразком;

– інтегрованим змістом навчальних програм з математики, вимогою формування системних, фундаментальних знань і дискретним (фактологічним, емпіричним) характером набутих знань і способів дій у процесі вивчення математики;

– гуманістичною, особистісно орієнтованою, культурологічною освітньою парадигмою та домінуючими в навчанні математики суб'єкт-об'єктними відносинами між учителем та учнями, викладачем і студентами;

– прикладною суттю математичних знань і нерозумінням їх походження (генези), незначною часткою задач прикладного змісту;

– збільшенням кількості годин на самостійну роботу і проблемою учіння математики як процесу суб'єктної діяльності.

Окрім цього, на нашу думку, існує глибоке внутрішнє протиріччя між змістом дисципліни та методикою її навчання: з одного боку, дедуктивним змістом математики, абстрактними математичними структурами, універсальними методами математичного дослідження, які формують теоретичні узагальнення та розвивають науково-теоретичне мислення, а з іншого – логікою навчального пізнання, асоціативно-рефлекторною теорією научіння, усталеною методикою навчання математики, що передбачають домінування емпіричних узагальнень й актуалізацію емпіричного мислення, нівелювання математичних здібностей і формування вузькоматематичних умінь і навичок.

Аналіз актуальних досліджень. Осібні теоретичні та методичні аспекти окресленої проблеми студіюються в роботах Е. І. Александрової, В. І. Горбачова, Б. В. Гнеденка, М. Я. Ігнатенка, В. Г. Моторіної, С. О. Скворцової, О. І. Скафи, З. І. Слєпкань, Н. А. Тарасенкової, О. С. Чашечникової. У наших новітніх дослідженнях розкрито зміст і встановлено структуру математичних здібностей, створено концепцію моделі навчально-математичної діяльності, а також розроблено теорію задач розвивальної математичної освіти. Установлено, що розвивальне навчання математики втілює *принцип розвивальної наступності*, згідно з яким розроблено задачну систему і встановлено зони найближчого математичного розвитку суб'єктів навчання. Насправді на концептуальному рівні в теорію навчання математики впроваджено наукову ідею про доцільність постановки та розв'язування задач *чотирьох рівнів змістового теоретичного узагальнення.* На нашу думку, визначена ієрархія задач, з одного боку, забезпечує інтеграцію дедуктивної суті математики та діяльнісної теорії її навчання, а з іншого - вможливлює встановлення в навчанні математики однієї із чотирьох зон найближчого математичного розвитку суб'єктів навчання: базова, навчальна, навчально-теоретична, навчально-дослідницька [1; 2; 3]. Натомість дотепер залишається актуальною проблема організації навчально-математичної діяльності у формі розв'язування навчально-теоретичних задач з математики, у процесі якого школярі і студенти оволодівають математичними методами згідно з логікою сходження від абстрактного (загального) до конкретного (часткового), відтак, у них насправді формуються системні знання і вміння на рівні методології математики.

Мета статті – у контексті задачного підходу до формування навчально-математичної діяльності розробити навчально-теоретичну модель процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла, навести приклад її реалізації, представлений рівень змістово-теоретичного узагальнення задач співвіднести із зоною найближчого математичного розвитку суб'єктів навчання.

Виклад основного матеріалу. Достеменно відомо, що універсальними методами знаходження шляху, площі, об'єму, роботи, енергії, маси є методи інтегрального числення. Тому навчально-теоретична задача про знаходження узагальненого способу дій у процесі розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла займає одне з чільних місць у чинній системі математичної підготовки. Прикладними називаємо теоретичні задачі практичного змісту. Отож у процесі розв'язування прикладних задач з математики застосовується метод математичного моделювання, створюються математичні моделі, що інтерпретують практичні задачні ситуації. Насправді реалізується така логічна схема: *практична задачна ситуація* $\Leftrightarrow$ *математичне моделювання* $\Leftrightarrow$ *математична модель* $\Leftrightarrow$ *реалізація математичної моделі.* Для формування узагальненого способу дій скористаємося моделлю процесу розв'язування навчально-теоретичних задач з математики [1, с. 130]:

1. Постановка навчально-теоретичної задачі на основі навчальної (кількох навчальних).
2. Змістовий аналіз навчально-теоретичної задачі з метою знаходження загального відношення, характерного для певного типу навчальних задач.
3. Формування змістово-теоретичних абстракцій і узагальнень, створення теоретичної моделі загального відношення.
4. Конструювання навчально-теоретичної моделі методу розв'язування математичних задач у вигляді етапності (ієрархії) навчально-пізнавальних і математичних дій як результату узагальнення процесу розв'язування навчальних задач.
5. Змістове планування та конструювання системи часткових різнотипних математичних задач, що розв'язуються на основі сформованого методу.
6. Контроль і корекція навчально-теоретичних дій.
7. Самоаналіз і самооцінка (змістова, процесуальна, референтна, ціннісна) засвоєння моделі процесу розв'язування навчально-теоретичної задачі з математики.

Реалізуємо представлену модель.

1. На основі навчальних задач про спосіб дій у процесі знаходження *площі* криволінійної трапеції, *об'єму* тіла обертання формулюється навчально-теоретична задача про створення моделі процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла (інтеграла Рімана).
2. За результатами змістового аналізу процесу розв'язування навчальних задач встановлюється, що характерним у кожній з них є обчислення величин, що інтерпретуються адитивною функцією $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
3. Формування змістово-теоретичних абстракцій і узагальнень про обчислення шуканої величини як границі інтегральної суми або визначеного інтеграла функції

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \cdot$$

4. Конструювання навчально-теоретичної моделі процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла.

4.1. Змістовий аналіз прикладної задачі, визначення її типу. Переформулювання задачі.

4.2. Перевірка того, що шукана величина інтерпретується адитивною функцією: $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

4.3. Виокремлення характеристик (параметрів) процесу, явища (задачної ситуації).

4.4. Виділення змінних і сталих величин. Знаходження відношень, у яких перебувають змінні та сталі величини, встановлення їх властивостей (характеристик).

4.5. Інтерпретація задачної ситуації засобами математики: графічне (геометричне) представлення, введення змінних (невідомих), формалізація.

4.6. Розбиття шуканої величини на n частин. Запис формули, за якою може бути обчислена кожна з величин.

4.7. Наближене обчислення шуканої величини як суми n величин. Виділення інтегральної суми.

4.8. Виокремлення інтегровної функції, встановлення меж її інтегрування.

4.9. Знаходження шуканої величини як границі інтегральної суми, обчислення визначеного інтеграла $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \cdot$ *Запис відповіді.*

4.10. Змістовий аналіз і самоконтроль виконаних дій.

4.11. Самооцінка засвоєння узагальненого способу дій у процесі розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла (змістова, процесуальна, референтна, ціннісна).

5. Змістове планування і добір (складання) різнотипних прикладних задач, що розв'язуються за допомогою визначеного інтеграла.
6. Контроль і корекція дій у ході розв'язування навчально-теоретичної задачі.
7. Самоаналіз і самооцінка засвоєння моделі процесу розв'язування навчально-теоретичної задачі про застосування визначеного інтеграла.

Представлена навчально-теоретична модель має дворівневу структуру, вона, з одного боку, розкриває етапність процесу розв'язування прикладних задач за допомого визначеного інтеграла, а з іншого – встановлює шлях навчального пізнання, що забезпечує її розроблення й усвідомлене засвоєння. Окрім цього, на кожному рівні передбачено самоаналіз, самооцінку і самоконтроль, тут, власне кажучи, виконується особлива змістово-теоретична дія і складова теоретичного мислення – рефлексія процесу учіння.

За логікою сходження від абстрактного (загального) до конкретного (часткового) реалізуємо побудовану модель (кроки 4.1 - 4.11) у процесі розв'язування такої прикладної задачі.

Задача. Яку мінімальну роботу для подолання сили тяжіння необхідно виконати, щоб насипати купу піску у формі конуса висотою H і радіусом основи R? Густина піску ρ *і його піднімають з площини основи конуса.*

1. Прикладна задача фізичного змісту. З умови задачі очевидно, що мінімальна робота для подолання сили тяжіння дорівнює потенціальній енергії купи піску. Задача переформульовується так: яка потенціальна енергія купи піску конічної форми з висотою *H* і радіусом основи *R*?

2. Як фізична величина потенціальна енергія інтерпретується адитивною функцією:

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

3. Потенціальна енергія матеріальної точки обчислюється за формулою

$$E=mqh\ ,$$

де m – маса тіла, q – прискорення вільного падіння, h – висота піднятого тіла.

4. За властивістю адитивності потенціальна енергія купи піску дорівнює сумі потенціальних енергій кожної піщинки

$$E_i=m_i q h_i\ ,$$

де m_i та h_i змінні, а q – стала.

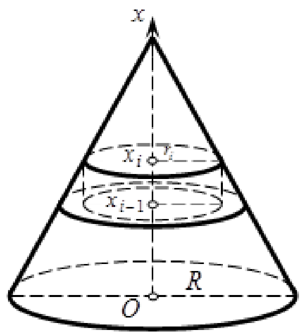

Рис. 1. Математична інтерпретація

5. Побудова прямого кругового конуса висотою *H* і радіусом основи *R*. Вибір осі абсцис, що містить висоту конуса і з початком в центрі його основи (рис. 1). Введення змінної, представлення потенціальної енергії піщинок як $E_i=m_i q x_i$.

6. Побудова перерізів конуса n площинами, що паралельні основі. Знаходження потенціальної енергії одержаних шарів піску $E_i=m_i q x_i$.

Тут $m_i=\rho\cdot V_i$, $V_i=S(x_i)\cdot\Delta x$, де V_i – об'єм і-го шару, $S(x_i)$ – площа поперечного перерізу, Δx – висота шару піску.

Очевидно, що $S(x_i)=\pi\cdot r_i^2$, де r_i – радіус основи і-го шару. З подібності трикутників (див. рис. 1) одержуємо

$$\frac{r_i}{R}=\frac{H-x_i}{H}.$$

Звідки $r_i=\dfrac{H-x_i}{H}R$.

Тому $S(x_i)=\dfrac{\pi\cdot R^2}{H^2}\cdot(H-x_i)^2$.

Отже, потенціальна енергія *i*-го шару піску

$$E_i=m_i\cdot q\cdot x_i=\rho\cdot V_i\cdot q\cdot x_i=\rho\cdot q\cdot S(x_i)\cdot x_i\cdot\Delta x=\frac{\pi\cdot\rho\cdot q\cdot R^2(H-x_i)^2 x_i\Delta x}{H^2}.$$

7. Потенціальну енергію купи піску знаходимо наближено за формулою

$$E=E_1+E_2+\ldots+E_n=\frac{\pi\cdot\rho\cdot q\cdot R^2}{H^2}\cdot\left((H-x_1)^2x_1\Delta x+(H-x_2)^2x_2\Delta x+\ldots+(H-x_n)^2x_n\Delta x\right).$$

Сума, що подана в дужках, є інтегральною сумою.

8. Очевидно, що інтегровною є функція

$$f(x)=(H-x)^2\cdot x\ ,$$

її межі інтегрування $0\le x\le H.$

9. Потенціальну енергію купи піску знаходимо як границю інтегральної суми при $\Delta x\to 0$, тобто обчислюємо визначений інтеграл

$$E=\frac{\pi\cdot\rho\cdot q\cdot R^2}{H^2}\cdot\int_0^H(H-x)^2\cdot x\,dx.$$

$$\int_0^H(H-x)^2\cdot x\,dx=\int_0^H\left(H^2x-2Hx^2+x^3\right)dx=\left(\frac{H^2x^2}{2}-\frac{2Hx^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_o^H=\frac{H^4}{2}-\frac{2}{3}H^4+\frac{1}{4}H^4=\frac{1}{12}H^4.$$

Отже, $A = E = \frac{\pi \cdot \rho \cdot q \cdot R^2}{H^2} \cdot \frac{H^4}{12} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot q \cdot R^2 \cdot H^2}{12}$.

Записуємо відповідь: $A = \frac{\pi \cdot \rho \cdot q \cdot R^2 \cdot H^2}{12}$.

10. Усі дії виконано згідно з моделлю процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла, операції виконано правильно.

11. Зрозуміло (не зовсім зрозуміло, незрозуміло) теоретичне підґрунтя реалізованої моделі (поняття визначеного інтеграла, інтегровної функції). Навчально-теоретичну модель процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла створено і реалізовано самостійно (з допомогою). У навчанні переважали колективно розподілені форми роботи (самонавчання, провідною була роль учителя, викладача). Серед ціннісних орієнтирів переважали цінності процесу пізнання (успіху і визнання, відповідальності й обов'язку, розвитку або ж превалював зовнішній мотив). Результати самооцінки фіксуються згідно з прийнятою системою знаків (геометричних фігур [4]).

Представлений рівень змістово-теоретичного узагальнення задачі співвідносимо із навчально-теоретичною зоною найближчого математичного розвитку суб'єктів навчання, у рамках якої моделюються узагальнені способи дій у процесі розв'язування прикладних задач з математики. Тому порізно мають вирішуватися навчально-теоретичні задачі, пов'язані з моделюванням процесу розв'язування прикладних задач методами границь і похідної. Організація повноцінної (цілісної) навчально-математичної діяльності здійснюється в умовах співпраці (співробітництва) вчителя та учнів, викладача і студентів, у ході колективного і колективно розподіленого розв'язування навчально-теоретичних задач з математики. *Перетворення навчально-теоретичної зони найближчого математичного розвитку учнів (студентів) в зону їхнього актуального розвитку (де відповідний тип задач розв'язується ними самостійно) засвідчує про нову інтелектуальну якість, перехід суб'єктів навчально-математичної діяльності (їхніх математичних здібностей) на вищий рівень розвитку.*

Висновки. Формування навчально-математичної діяльності здійснюється в умовах реалізації задачного підходу, в процесі розв'язування різнотипних задач. Задля розвитку математичних здібностей суб'єктів навчання, активізації їхнього структурно-математичного мислення (як різновиду теоретичного) важливо, щоб задачі різнилися рівнем змістового теоретичного узагальнення. Навчально-теоретичні задачі з математики забезпечують формування системних знань, оволодіння узагальненими способами дій, а їх рівень змістово-теоретичного узагальнення слугує актуалізації математичних здібностей і, водночас, репрезентує навчально-теоретичну зону найближчого математичного розвитку суб'єктів навчання математики. Розроблена модель процесу розв'язування прикладних задач за допомогою інтеграла Рімана має дворівневу структуру й визначає узагальнений спосіб дій як для викладача (вчителя), так і студентів (учнів). Її методична доцільність, окрім вищезазначеного, зумовлена логікою навчального пізнання, в основі якої метод сходження від абстрактного (загального) до конкретного (часткового), що адекватно відповідає дедуктивній суті математики. Моделюванню процесу розв'язування інших навчально-теоретичних задач з математики будуть присвячені наші подальші роботи.

Список використаних джерел

1. Семенець С. П. Методологія і теорія розвивального навчання математики : [монографія] / С. П. Семенець. – Житомир : Вид-во О. О. Євенок, 2015. – 236 с.
2. Семенець С. П. Теорія і практика розвивального навчання у системі методичної підготовки майбутніх учителів математики : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук : спец. 13.00.04 „Теорія і методика професійної освіти" / С. П. Семенець. – Житомир, 2011. – 44 с.
3. Семенець С. П. Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів / С. П. Семенець // Математика в рідній школі. – 2016. – № 4. – С. 14–18.
4. Семенець С. П. Рефлексія як особлива задача розвивального навчання математики / С. П. Семенець // Математика в школі. – 2009. – № 10. – С. 13–15.

Анотація. Семенець С. П. Навчально-теоретичні задачі з математики: моделювання процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла.

У роботі з погляду особистісно-розвивальної концепції освіти розкрито основні суперечності чинної системи математичної підготовки, серед яких ключовим названо глибоке внутрішнє протиріччя між змістом дисципліни та методикою її навчання. У контексті задачного підходу до формування навчально-математичної діяльності розроблено навчально-теоретичну модель процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла. Доведено, що навчально-теоретичні задачі з математики забезпечують формування системних знань, оволодіння узагальненими способами дій, а їх рівень змістово-теоретичного узагальнення слугує актуалізації математичних здібностей і, водночас, репрезентує навчально-теоретичну зону найближчого математичного розвитку суб'єктів навчання математики. Розроблена модель процесу розв'язування прикладних задач за допомогою інтеграла Рімана має дворівневу структуру й визначає узагальнений спосіб дій як для викладача (вчителя), так і студентів (учнів). Обґрунтовано, що методична доцільність представленої моделі зумовлена логікою навчального пізнання, в основі якої метод сходження від абстрактного (загального) до конкретного (часткового), що адекватно відповідає дедуктивній суті математики. Послуговуючись саме такою логікою, подано поетапне розв'язання прикладної задачі про мінімальну роботу для подолання сили тяжіння. Специфіка реалізованого способу дій полягає в його рефлексивній складовій, а саме: змістовому аналізі і самоконтролі виконаної навчально-математичної діяльності, а також самооцінці засвоєння узагальненого способу дій у процесі розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла (змістовій, процесуальній, референтній, ціннісній).

Ключові слова: *навчально-теоретичні задачі з математики, моделювання, прикладні задачі, зона найближчого математичного розвитку, сходження від абстрактного (загального) до конкретного (часткового), визначений інтеграл.*

Аннотация. Семенец С. П. Учебно-теоретические задачи по математике: моделирование процесса решения прикладных задач с помощью определенного интеграла.

В работе с точки зрения личностно-развивающей концепции образования раскрыты основные противоречия системы математической подготовки, ключевым среди которых названо глубокое внутреннее противоречие между содержанием дисциплины и методикой ее обучения. В контексте задачного подхода к формированию учебно-математической деятельности создано учебно-теоретическую модель процесса решения прикладных задач с помощью определенного интеграла. Доказано, что учебно-теоретические задачи по математике обеспечивают формирование системных знаний, овладение обобщенными способами действий, а их уровень содержательно-теоретического обобщения служит актуализации математических способностей и, одновременно, представляет учебно-теоретическую зону ближайшего математического развития субъектов обучения математике. Разработанная модель процесса решения прикладных задач с помощью интеграла Римана имеет двухуровневую структуру и определяет обобщенный способ действий как для преподавателя (учителя), так и студентов (учеников). Обосновано, что методическая целесообразность представленной модели обусловлена логикой учебного познания, в основе которой метод восхождения от абстрактного (общего) к конкретному (частичному), адекватно отвечает дедуктивной сути математики. Пользуясь именно такой логикой, подано поэтапное решение прикладной задачи о минимальной работе для преодоления силы тяжести. Специфика реализованного способа действий заключается в его рефлексивной составляющей, а именно: содержательном анализе и самоконтроле проделанной учебно-математической деятельности, а также самооценке усвоения обобщенного способа действий в процессе решения прикладных задач с помощью определенного интеграла (содержательной, процессуальной, референтной, ценностной).

Ключевые слова: *учебно-теоретические задачи по математике, моделирование, прикладные задачи, зона ближайшего математического развития, восхождение от абстрактного (общего) к конкретному (частному), определенный интеграл.*

Abstract. Semenets S. P. Educational-theoretical problems in mathematics: modeling the process of solving applied problems using definite integral.

In the work from the point of view of personal-developmental concept of education disclosed the basic contradictions of the current system of mathematical training among which the key is named deep inner contradiction between the course content and method of learning. In the context of task approach to forming of educational-mathematical activities developed by the educational-theoretical model of the process of solving applied problems using definite integral. It is proved that training and theoretical problems in mathematics provide the formation of system knowledge, the acquisition of generalized methods of action, and their level of meaningful theoretical synthesis is the actualization of mathematical abilities and at the same time is educational-theoretical zone of proximal mathematics development of the subjects of teaching mathematics. The developed model of the process of solving applied tasks with the help of the Riemann integral has a duplex structure, and defines a generalized method of action for the teacher (teachers) and students (learners). It is proved that the methodological feasibility of the presented model is due to the logic of educational knowledge, based on the method of ascent from the abstract (General) to concrete (specific) that adequately corresponds to the deductive fact of mathematics. Guided by this logic, presents a solution of the applied tasks of the physical content of the minimum work to overcome the force of gravity. The specifics of the implemented course of action lies in its reflexive component, namely: content analysis and self-made teaching and mathematical activities and self-assessment the absorption of the generalized mode of action in the process of solving applied problems using definite integral (substantive, procedural, reference, value).

Key words: *educational-theoretical problems in mathematics, modelling, applied problems, the mathematical zone of proximal development, of ascent from the abstract (General) to concrete (specific), definite integral.*