Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Скороход Г.И. Общенаучные методы решения задач в обучении математике. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 2(16). С. 117-120.

Skorokhod G. Common Scientific Methods Of Solving Problems In Teaching Mathematics. Physical and Mathematical Education. 2018. Issue 2(16). P. 117-120.

УДК 372.851

Г.И. Скороход
Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара, Украина
gskorokhod@yahoo.com
DOI 10.31110/2413-1571-2018-016-2-022

ОБЩЕНАУЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. *Подавляющее большинство учеников общеобразовательной школы не станут математиками, следовательно, математика для них должна быть именно общеобразовательным предметом. Поэтому, акцент при обучении математике желательно делать на понятиях и методах решения задач, которые являются общенаучными и объединяют математику с другими естественными и техническими науками и даже с философией как общим подходом к познанию мира. Для реализации такого подхода нужно создать набор задач разных типов, каждая из которых решается с применением нескольких приёмов, так, чтобы весь набор приёмов представлял неоднократное применение всех изучаемых методов в разных комбинациях.*

Основные математические методы, имеющие общенаучное и философское значение, подробно рассмотрены в книгах Д. Пойя. В настоящей статье приведен более широкий перечень, содержащий 36 общенаучных методов решения математических задач (с короткими комментариями), а именно: исследовать особенности постановки задачи; метод проб и ошибок; перебор вариантов; направленный перебор вариантов; подобрать одно или несколько решений; дедукция; индукция; разделить целое на части; собрать целое по частям, комбинация частных решений; свести решение задачи к решению подзадач; сравнить объекты и сделать выводы из этого сравнения; сравнить два объекта через третий; вычислить величину двумя способами и сравнить полученные значения; сформировать другое множество, сравнение с которым позволяет решить задачу; установить взаимнооднозначное соответствие с другим множеством; ввести вспомогательные элементы; ввести вспомогательную функцию y=f(x) и преобразовать исходную задачу; осуществить последовательность равносильных преобразований объекта; осуществить пошаговое приближение ко всему искомому решению (метод последовательных приближений); осуществить последовательное вычисление новых компонент многокомпонентного решения; сузить область поиска; переформулировать условие задачи; заменить термин его определением или, наоборот, заменить описание объекта соответствующим термином; доказательство от противного; рекурсия; математическая индукция; указать контрпример; решить задачу «от конца к началу»; решить более общую задачу; решить более простую, родственную задачу; уменьшить размерность задачи; пересечение множеств как метод решения задачи; метод неопределённых элементов; найти и использовать инвариант задачи;.

Для многих методов указан тип задач, которые решаются этим методом, и примеры задач. Приведены ссылки на статьи автора, в которых связи между типами задач и методами их решения рассмотрены более полно. Математические понятия, имеющие общенаучное значение, рассмотрены в отдельной статье автора.

Ключевые слова*: математика, обучение математике, содержание школьного курса математики, математические понятия, методы решения математических задач.*

Постановка проблемы. Подавляющее большинство учеников общеобразовательной школы не станут математиками, следовательно, математика для них должна быть именно общеобразовательным предметом. Поэтому, на наш взгляд, акцент при обучении математике необходимо делать на понятиях и методах решения задач, которые являются общенаучными и объединяют математику с другими естественными и техническими науками и даже с философией как общим подходом к познанию мира. Математические понятия, имеющие общенаучное значение, рассмотрены в статье автора [1].

Анализ актуальных исследований. Основные математические методы, имеющие общенаучное и философское значение, подробно рассмотрены в книгах Д. Пойя [2-4].

Цель статьи. В настоящей статье приведен более широкий перечень методов (34 метода) с короткими комментариями. Для некоторых методов указан тип задач, которые решаются этим методом, и примеры задач. Более полно связи между типами задач и методами их решения рассмотрены в статьях [5-7].

Метод исследования. Логический анализ методов решения большого количества разнотипных задач, выделение методов, имеющих общенаучное значение, и объединение аналогичных по сути методов под общим названием.

Изложение основного материала. Нами отобраны следующие методы решения математических задач, которые являются общенаучными:

Общенаучные методы решения математических задач

Исследовать особенности постановки задачи: 1) если возможно, определить тип задачи и использовать для её решения один из методов решения задач такого типа, 2) если подвести задачу под тип не получилось, использовать для решения её нетипичные особенности.

Метод проб и ошибок. Спонтанный перебор различных методов решения задачи. Этот метод и метод перебора вариантов предлагаются ученикам уже младшей школы в учебниках по математике Г.В. Дорофеева и Л.Г. Петерсон.

Перебор вариантов. Может быть применен, когда полное множество изолированных вариантов можно сформировать, и количество вариантов конечно. В результате перебора всех вариантов отбираются те, которые удовлетворяют всем условиям задачи.

Направленный перебор вариантов: метод перебора, при котором каждый следующий шаг приближает к искомому решению. Пример: симплекс-метод в линейном программировании.

Подобрать одно или несколько решений, и перейти к задаче нахождения остальных решений, или доказать, что других решений не существует.

Дедукция – вывод следствий. Многие задачи (логические, доказательства теорем) решаются с применением только этого метода.

Индукция: проанализировать частные случаи и использовать результаты анализа для решения общей задачи [3].

Разделить целое на части. Примеры: 1) разложение функции в ряд, 2) разложение подынтегральной функции на слагаемые.

Собрать целое по частям. Пример: интегрирование по частям.

Комбинация частных решений: получить нужное число частных решений и сформировать из них общее решение (часто путём линейной суперпозиции [4]). Можно рассматривать как частный случай собрания целого по частям.

Свести решение задачи к решению подзадач, вплоть до стандартных задач. В частности, свести к решению одной задачи.

Сравнить объекты и сделать выводы из этого сравнения. Один из основных методов познания мира. Многие современные тестовые задания основаны на установлении сходных и различных свойств объектов.

Сравнить два объекта через третий. Очень распространённый и эффективный приём. Примеры: 1) $a=b,\ c=b \rightarrow a=c$; 2) $a||b,\ c||b \rightarrow a||c$; 3) $y=f(x),\ y=g(x) \rightarrow f(x)=g(x)$.

Вычислить величину *A* двумя способами и сравнить полученные значения $A1$, $A2$. Варианты использования результатов сравнения: 1) уравнение $A1=A2$ может помочь в решении задачи. В частности, именно так составляются уравнения многих задач, а именно, величина y представляется двумя способами через неизвестную x : $y= f(x)$ и , $y= g(x)$, откуда, сравнивая два объекта через третий, получаем уравнение $f(x)=g(x)$; 2) неравенство $A1 \neq A2$ может привести к противоречию; 3) сравнение через третью величину a: когда $A1> a$, $A2 <a$, имеем противоречие, когда $A1 \geq a$, $A2 \leq a$, получаем уравнение $A1 = A2$.

Сформировать другое множество, сравнение с которым позволяет решить задачу. Примеры: 1) известная задача об определении мешка с фальшивыми монетами среди 10 одинаковых мешков за одно взвешивание. Задача решается тем, что из каждого мешка выбирается различное число монет, и это множество монет взвешивается. Множество для сравнения создаётся виртуально предположением, что все выбранные монете не фальшивые. Сравнение весов этих двух множеств позволяет легко определить, из какого мешка были взяты фальшивые монеты; 2) известная задача об определении количества фазанов и кроликов, если известно, сколько у них голов и ног. В этой задаче виртуальное множество создаётся предположением, что все животные фазаны (или кролики). Её можно решить и математическим моделированием, и педагогически целесообразно показать оба метода.

Установить взаимнооднозначное соответствие с другим множеством, для которого искомую величину можно вычислить.

Ввести вспомогательные элементы [4]. Один из мощных методов решения задач различных типов. Цели: 1) установить связи между элементами объекта задачи, 2) свести задачу к подзадачам. Примеры: 1) замена переменной, 2) проведение линий, плоскостей и т.д. Сложность часто заключается в определении того вспомагательного элемента, который поможет решить задачу.

Ввести вспомогательную функцию $y=f(x)$ **и преобразовать исходную задачу** относительно переменной x в равносильную задачу относительно переменной y, решить новую задачу, и совершить обратное преобразование $x= f^{-1}(y)$.

Осуществить последовательность равносильных преобразований объекта, т.е. таких, при которых искомая величина остаётся инвариантной. Примеры: 1) равносильные преобразования уравнения (системы уравнений), при которых каждое следующее уравнение имеет то же решение, что и настоящее, и предыдущие [7].

Осуществить пошаговое приближение ко всему искомому решению (метод последовательных приближений).

Осуществить последовательное вычисление компонент многокомпонентного решения (противоположность приближению ко всему искомому решению) [4]. Пример: последовательное вычисление координат вектора.

Сузить область поиска. Примеры: 1) приближённое вычисление корня функции, 2) определение задуманного трёхзначного числа методом половинного деления множества чисел от 100 до 999.

Переформулировать условие задачи (на том же языке, на другом языке), т.е. перейти к задаче, которая имеет то же решение, но другую форму представления постановки задачи. Искомое решение является инвариантом операции переформулирования. Типы задач: 1) для решения прикладных задач – метод математического моделирования (метод

Декарта [4]), 2) для решения математических задач: переход от алгебраического языка к геометрическому, переход от геометрического языка к алгебраическому. Иногда переформулирование приводит к равносильной задаче, решение которой очевидно.

Заменить термин его определением или, наоборот, заменить описание объекта соответствующим термином. Пример: если в известной задаче (в которой требуется провести, не отрывая карандаш от бумаги, трехзвенную замкнутую ломаную линию через вершины квадрата) осознать, что такая ломаная есть треугольник, и заменить понятие «замкнутая трёхзвенная ломаная» термином «треугольник» то задача переформулируется так, что её решение становится очевидным, более того, очевидно, что задача имеет бесчисленное множество решений.

Доказательство от противного. Пример перехода от решения данной задачи к решению другой. Многие теоремы математического анализа доказываются именно этим методом.

Рекурсия [4]. Постановка задачи: для упорядоченной последовательности найти соотношение, связывающее общий член последовательности S_k с предыдущими членами, тогда, получаем метод рекурсии: определив нужное число первых членов последовательности, следующие члены последовательности можно находить рекуррентно, т.е. через ранее найденные члены. Математическую рекурсию можно трактовать как специфический частный случай последневной жизненной ситуации, в которой результат действий на данном шаге зависит от результатов действий на предыдущих шагах.

Математическая индукция [4]**.** Частный случай рекурсии. Метод применяется в математике к задачам определённого типа, в которых нужно доказать, что высказывание A_n истинно для всех значений параметра n, начиная с некоторого. Метод индуктивный по форме и дедуктивный по сути, как и каждый математический метод доказательства.

Указать контрпример. Позволяет опровергнуть общее утверждение, для этого достаточно привести всего один контрпример.

Решить задачу «от конца к началу». Применяется к задачам, в которых задана последовательность операций, в которой каждая операция последовательности: 1) применяется к результату предыдущей операции, 2) является однозначной, 3) имеет однозначную или многозначную обратную операцию. Известен результат реализации последовательности (конец), требуется определить объект, к которому была применена первая операция (начало). Такие задачи решаются методом обратных преобразований («от конца к началу»): к конечному значению применяется последовательность обратных операций. Пример: решить уравнение $\sin x = 1$. Такое уравнение можно трактовать как преобразование начального состояния x с помощью операции $\sin z$ к конечному состоянию $\sin x$, значение которого в данной задаче равно 1. Отметим, что уравнение $\sin x + \cos x = 1$ не может быть решено методом обратных преобразований, ибо здесь конечное состояние 1 получено путём суммирования результатов двух параллельных операций $\sin x$ и $\cos x$, идущих от начального состояния x [7]**.**

Решить более общую задачу, и затем получить из общего решения искомое частное [4]**.**

Решить более простую, родственную задачу, это может подсказать метод решения исходной задачи [4, с. 95]**.**

Уменьшить размерность задачи. В случае, когда метод решения не зависит от размерности задачи, переход к задаче меньшей размерности может помочь найти этот метод**.**

Метод геометрических мест: получить искомое решение как пересечение множеств решений каждого из условий постановки задачи [4]**.**

Пересечение множеств как метод решения задачи. Является обобщением метода геометрических мест. Позволяет перейти от множества А, содержащего заданные величины, к множеству В, содержащему искомую величину, через их пересечение $A \cap B$**.** Примеры: 1) в стереометрии элементы, лежащие в разных плоскостях, связываются между собой через отрезок, принадлежащий прямой пересечения этих плоскостей, 2) высота треугольника разделяет его на два треугольника и является их общим элементом (пересечением), который позволяет через элементы, заданные в одном треугольнике, перейти к вычислению элементов в другом.

Метод неопределённых элементов: задать гипотетически структуру решения, оставив неопределёнными несколько элементов; задача сводится к определению этих элементов. Чаще всего, неопределёнными являются некоторые коэфициенты (метод неопределённых коэфициентов). Примеры: 1) разложение дроби на слагаемые с заданными знаменателями, 2) методы Бубнова-Галёркина и Ритца в вариационном исчислении.

Найти и использовать инвариант задачи. Примеры инвариантов: чётность (нечётность), длина линии, площадь и т.д. Типы задач: 1) дана последовательность операций, в частности, преобразований объекта, требуется вычислить или оценить результат этой последовательности (метод: найти инвариант последовательности операций, который помогает решить задачу); 2) вычислить или оценить объект (метод: найти такое преобразование объекта, при котором искомая величина является инвариантом и в преображённом объекте она может быть вычислена). Пример: известная задача о пауке и мухе, её решение основано на том, что длина ломаной не меняется при изменении угла между её звеньями [7]**.**

Выводы. В статье приведен набор методов решения математических задач, которые являются общенаучными, и освоение которых, по нашему мнению, должно быть одной из основных целей общего образования как в школе, так и в вузе. В этом мнении нас поддерживает тот факт, что о книге Д. Пойя «Как решать задачу» [2] видный алгебраист Б.Л. Ван-дер-Варден сказал, что «эту увлекательную книгу должен прочитать каждый студент, каждый учёный, а особенно, каждый учитель» [2, с.4], а книга Д. Пойя «Математическое открытие» [4] прямо адресована учителям средней школы. В то же время автор осознаёт, насколько непросто реализовать такую цель, для этого нужно создать набор задач разных типов, каждая из которых решается с применением нескольких приёмов, так, чтобы весь набор приёмов представлял неоднократное применение всех изучаемых методов в разных комбинациях. Но и при существующем наборе задач желательно выделять обобщённый тип задачи и акцентировать внимание на обобщённых методах её решения.

Список использованных источников

1. Скороход Г.И. Общенаучные понятия в обучении математике. Фізико-математична освіта: науковий журнал. 2018. Випуск 1(15). С. 302-304.

2. Пойя, Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз РСФСР, 1959. 208 с.
3. Пойя, Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Изд-во иностранной литературы., 1957. 536 с.
4. Пойя, Д. Математическое открытие. М.: Наука, 1970. 452 с.
5. Скороход, Г.І. Основні методи розв'язання нестандартних математичних задач. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: збірник наукових праць. Випуск Х. Кривий Ріг. Видавничий відділ НМетАУ, 2012. Т. 1: Теорія та методика навчання математики. С.228-234.
6. Скороход, Г.И. Некоторые типы математических задач и методы их решения. Фізико-математична освіта: науковий журнал. 2016. Випуск 4(10). С. 126-130.
7. Скороход, Г.І. Перетворення об'єктів як тип та метод розв'язання текстових задач. Педагогічні науки: збірник наукових праць. Випуск LXXVI. Том 1. Херсон. Видавничий дім «Гельветика», 2017. С. 117-121.

References

1. Skorokhod, G.I. Obschenauchnyie ponyatiya v obuchenii matematike. Fiziko-matematichna osvita : naukoviy zhurnal. 2018. Vipusk 1(15). S. 302-304.
2. Polya, D. Kak reshat zadachu. M.: Uchpedgiz RSFSR, 1959. 208 s.
3. Polya, D. Matematika i pravdopodobnyie rassuzhdeniya. M.: Izd-vo inostrannoy literaturyi., 1957. 536 s.
4. Polya, D. Matematicheskoe otkryitie. M.: Nauka, 1970. 452 s.
5. 5. Skorokhod, G.I. Osnovni metodi rozv'yazannya nestandartnikh matematichnikh zadach. Teoriya ta metodika navchannya matematiki, fiziki, informatiki: zbirnik naukovikh prats'. Vipusk X. Kriviy Rig. Vidavnichiy viddil NMetAU, 2012. T. 1: Teoriya ta metodika navchannya matematiki. C.228-234.
6. 6. Skorokhod, G.I. Nekotorye tipy matematicheskikh zadach i metody ikh resheniya. Fiziko-matematichna osvita : naukoviy zhurnal. 2016. Vipusk 4(10). S. 126-130.
7. 7. Skorokhod, G.I. Peretvorennya ob'єktiv yak tip ta metod rozv'yazannya tekstovikh zadach. Pedagogichni nauki: zbirnik naukovikh prats'. Vipusk LXXVI. Тom 1. Kherson. Vidavnichiy dim «Gel'vetika», 2017. S. 117-121.

COMMON SCIENTIFIC METHODS OF SOLVING PROBLEMS IN TEACHING MATHEMATICS

Georgiy Skorokhod

Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine

Abstract. *The overwhelming majority of pupils of a comprehensive school will not become mathematicians, therefore, mathematics for them should be just a general educational subject. Therefore, the emphasis in teaching mathematics is desirable to do on the concepts and methods of solving problems that are general scientific and integrate mathematics with other natural and technical sciences and even with philosophy as a general approach to cognition of the world. To implement this approach, it is necessary to create a set of problems of different types, each of which is solved using several methods, so that the entire set of techniques represents the repeated application of all the methods studied in different combinations.*

Basic mathematical concepts and methods, having a general scientific and philosophical significance, are considered in detail in the books of D. Poya. In this article, a broader list of 36 general scientific methods for solving mathematical problems (with short comments) is given, namely: to investigate the specifics of the formulation of the problem; trial and error method; pick one or more solutions; deduction; induction; divide the whole into parts; collect the whole in parts a combination of particular solutions; reduce the solution of the problem to the solution of subproblems; search options; a directional search of options; compare objects and draw conclusions from this comparison; compare two objects through the third; calculate the value in two ways and compare the values obtained; form a different set, a comparison with which allows you to solve the problem; to establish one-to-one correspondence with another set; enter auxiliary elements; introduce an auxiliary function y = f (x) and transform the original problem; implement a sequence of equivalent transformations of the object; to make a step-by-step approximation to the whole sought solution (the method of successive approximations); to carry out sequential calculation of new components of a multicomponent solution; narrow your search; reformulate the condition of the problem; proof by contradiction; recursion; mathematical induction; specify a counterexample; solve the problem "from end to beginning"; solve a more general problem; solve a simpler, related problem; reduce the dimension of the problem; intersection of sets as a method of solving a problem; method of undefined elements; find and use the invariant of the problem, replace the term by its definition or, conversely, replace the description of the object with the appropriate term.

For many methods, the type of problems that are solved by this method, and examples of problems are indicated. Reference is made to the author's articles in which the connections between types of problems and methods for their solution are considered more fully. Mathematical concepts that have general scientific significance are considered in a separate article of the author.

Keywords: *mathematics, teaching mathematics, the content of the school course of mathematics, mathematical concepts, methods for solving mathematical problems.*