Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Тургунбаев Р.М., Шарипова Л.Д. Об одной занимательной задаче на расстояние между кривыми. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 2(16). С. 130-135.

Turgunbaev R., Sharipova L. On An Entertaining Problem Of The Distance Between The Curves. Physical and Mathematical Education. 2018. Issue 2(16). P. 130-135.

УДК 514.11

Р.М. Тургунбаев[1], Л.Д. Шарипова[2]
[1]Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Узбекистан
musamat1@yandex.ru
[2]Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Узбекистан
slola@mail.ru
DOI 10.31110/2413-1571-2018-016-2-025

ОБ ОДНОЙ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ НА РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ КРИВЫМИ

Аннотация. *В школьном курсе геометрии расстояние от точки A до прямой l определяется как длина перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l. А формулы расстояния как между точкой и прямой, так и между параллельными прямыми выводятся уже в вузовском курсе аналитической геометрии. Прямая как график линейной функции определяется в школьном курсе алгебры, где общий вид линейной функции рассматривается как общее уравнение прямой. В курсе алгебры и начал анализа определяется касательная и приводится ее уравнение. Но ни уравнения прямой, проходящей через заданные две точки, ни условия перпендикулярности прямых в общеобразовательном курсе математики не изучаются. Однако эти факты можно вполне доступно изложить как учащимся старших классов средних школ, так и академических лицеев. Вместе с тем можно рассматривать задачи на расстояние между кривыми, в частности, между прямой и параболой, а также между параболами. Эти задачи можно изучать на факультативных занятиях по математике со школьниками, проявляющими повышенный интерес к изучаемому предмету.*

В данной статье расстояние между точкой и кривой определяется как наименьшее расстояние от данной точки до точек кривых, а расстояние между кривыми определяется как наименьшее расстояние между точками данных кривых. В случае, когда кривые являются графиками некоторых дифференцируемых функций, используя методы дифференциального исчисления и обобщения доказаны следующие факты: расстояние между точкой и прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую; в случае параболы расстояние от точки до кривой равно длине перпендикуляра, проведенного к касательной в точке касания; расстояние между параболой и прямой равно расстоянию между прямой и касательной к параболе, параллельной данной прямой; расстояние между двумя параболами равно расстоянию между параллельными касательными к этим параболам. Приводится пример решения задачи на нахождение расстояние между параболами. При этом предварительно выводится уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, доказывается критерий перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами.

Ключевые слова: *точка, прямая, перпендикуляр, кривая, парабола, расстояние, производная*

Из школьного курса геометрии известно, что если точки A и B заданы своими координатами: $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то расстояние между этими точками вычисляется по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Расстояние между прямой и точкой определяется как длина перпендикуляра, опущенного из заданной точки на эту прямую. Уравнение прямой, понятия углового коэффициента, касательной и геометрический смысл производной вводятся в курсах алгебры, алгебры и начал анализа [1].

При изучении расстояния между точкой и линией было бы полезным рассмотреть следующую задачу: если прямая задана уравнением $y = kx + m$, как можно найти расстояние между произвольной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и этой прямой. Далее можно рассмотреть обобщения этой задачи: как найти расстояние между точкой и кривой (в нашем случае графиком некоторой функции), как найти расстояние между прямой и кривой, между кривыми? Отметим, что приведенные задачи вполне доступны учащимся старших классов средних школ и академических лицеев.

В данной статье приведено решение этих задач в случае, когда кривой является парабола. Для этого предварительно выведены вспомогательные формулы и утверждения. Задачи решены методами дифференциального исчисления и обобщения.

Известно, что через две данные точки можно провести единственную прямую. Это означает, что уравнение прямой можно выразить (получить), используя координаты заданных точек. Будем считать, что уравнение прямой имеет вид $y = kx + m$, где $k \neq 0$. Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ принадлежат прямой $y = kx + m$. Тогда их координаты удовлетворяют уравнению прямой, и мы получаем систему

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + m, \\ y_2 = kx_2 + m. \end{cases}$$

Из системы находим $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя выражение для k в первое уравнения системы, получим

$$m = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Откуда имеем

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, при $x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2$. Если $x_1 \neq x_2,\ y_1 = y_2$, то из (1) имеем $y = y_1$. Это уравнение прямой, параллельной оси Ox. Если $x_1 = x_2,\ y_1 \neq y_2$, то выражая в (1) x через y:

$$x = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot y - \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{y_2 - y_1}, \quad (2)$$

получим, что уравнение прямой имеет вид $x = x_1$. Это уравнение прямой, параллельной оси Oy.

Таким образом, если даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то уравнение прямой проходящей через эти точки имеет вид (1) или (2). Частными случаями этих уравнений являются уравнения горизонтальных прямых вида $y = y_1$ или вертикальных прямых вида $x = x_1$.

Из уравнения (1) с помощью несложных преобразований можно получить следующий вид уравнения прямой проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Прямые $y = k_1 x + m_1$ и $y = k_2 x + m_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 k_2 = -1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть прямые $y = k_1 x + m_1$ и $y = k_2 x + m_2$, где $k_1 = tg\alpha$, $k_2 = tg\beta$ (рис.1), перпендикулярны. Очевидно, что $\beta = 90^0 + \alpha$. Используя известные тригонометрические формулы, получим

$$k_1 k_2 = tg\alpha \cdot tg\beta = tg\alpha \cdot tg(90 + \alpha) = tg\alpha \cdot (-ctg\alpha) = -1.$$

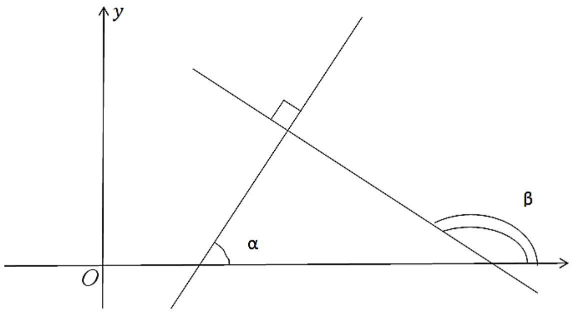

Рис. 1

Достаточность. Пусть $k_1 k_2 = -1$. Тогда

$$tg\alpha \cdot tg\beta = -1 \Leftrightarrow tg\alpha = -ctg\beta \Leftrightarrow tg\alpha + ctg\beta = 0 \Leftrightarrow \frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\beta}{sin\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{sin\alpha sin\beta + cos\alpha cos\beta}{cos\alpha sin\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos(\beta - \alpha)}{cos\alpha sin\beta} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\cos(\beta - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 90^0.$$

Отсюда следует, что угол между прямыми равен 90^0, т.е. данные прямые перпендикулярны. Теорема доказана.

Определение 1. Расстоянием между точкой А и прямой l называется наименьшее расстояние между точкой А и точками прямой l.

Теорема 2. Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0)$ и прямая $y = kx + m$. Тогда расстояние d между ними определяется по формуле

$$d = \frac{|kx_0 + m - y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}}. \quad (4)$$

Если $M_1(x_1, y_1)$ – точка прямой такая, что расстояние между точками M_0 и M_1 равно d, то прямая $M_0 M_1$ перпендикулярна прямой $y = kx + m$.

Доказательство. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит прямой $y = kx + m$. Тогда ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е. $y = kx + m$, и квадрат расстояния между точками M_0 и M $d^2 = (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2$. Учитывая это, имеем $d^2 = (kx + m - y_0)^2 + (x - x_0)^2$. Как видно, d^2 является функцией от x, для удобства обозначим эту функцию через $f(x)$:

$$f(x) = (kx + m - y_0)^2 + (x - x_0)^2. \quad (5)$$

Таким образом, нахождение расстояния между точкой $M_0(x_0, y_0)$ и прямой $y = kx + m$ сводится к отысканию наименьшего значения функции (5).

Находим производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = 2(kx + m - y_0)(kx + m - y_0)' + 2(x - x_0)(x - x_0)' = 2k(kx + m - y_0) + 2(x - x_0).$$

Из уравнения $f'(x) = 0$ находим стационарную точку: $2k(kx + m - y_0) + 2(x - x_0) = 0$,

$$k(kx + m - y_0) + (x - x_0) = 0, \quad (6)$$

откуда

$$(k^2+1)x + k(m-y_0) - x_0 = 0, \qquad x = \frac{x_0 - k(m-y_0)}{(k^2+1)}.$$

Очевидно, что эта точка является точкой минимума функции (5). Вычислим значение функции в этой точке:

$$f(x) = \left(k\cdot\frac{x_0-k(m-y_0)}{k^2+1} + m - y_0\right)^2 + \left(\frac{x_0-k(m-y_0)}{k^2+1} - x_0\right)^2 = \left(\frac{kx_0 - k^2(m-y_0) + k^2(m-y_0) + (m-y_0)}{k^2+1}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{x_0-k(m-y_0)-x_0k^2-x_0}{k^2+1}\right)^2 = \left(\frac{kx_0+m-y_0}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-k(kx_0+m-y_0)}{k^2+1}\right)^2 =$$

$$= \frac{(kx_0+m-y_0)^2}{(k^2+1)^2} + \frac{k^2(kx_0+m-y_0)^2}{(k^2+1)^2} = \frac{(kx_0+m-y_0)^2(1+k^2)}{(k^2+1)^2} = \frac{(kx_0+m-y_0)^2}{k^2+1},$$

откуда получаем формулу (4).

Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – точка прямой, для которой расстояние между M_0 и M_1 равно расстоянию между точкой M_0 и заданной прямой. Тогда она удовлетворяет равенству (6): $k(y_1-y_0)+(x_1-x_0)=0$, откуда

$$k = -\frac{x_1-x_0}{y_1-y_0}$$

или

$$k = -\frac{1}{\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}. \qquad (7)$$

Введем обозначение $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = k_1$. Число k_1 равно угловому коэффициенту прямой M_1M_0. Из (7) имеем $k\cdot k_1 = -1$. А это означает перпендикулярность прямых M_1M_0 и $y = kx+m$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Определение 2. Расстоянием между параллельными прямыми называется наименьшее расстояние между точками этих прямых.

Теорема 3. Пусть прямые $y = kx + m_1$ и $y = kx + m_2$ параллельны. Тогда расстояние между ними определяется по формуле

$$d = \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{k^2+1}}. \qquad (8)$$

Доказательство. Возьмем на прямой $y = kx + m_1$ точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда расстояние от этой точки до прямой $y = kx + m_2$ равно

$$d = \frac{|kx_0 + m_2 - y_0|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Но по выбору точки $M_0(x_0, y_0)$ имеем $y_0 = kx_0 + m_1$ или $kx_0 - y_0 = m_1$. Учитывая это получим (8).

Формулу (8) можно получить, используя графическое представление прямых (рис. 2).

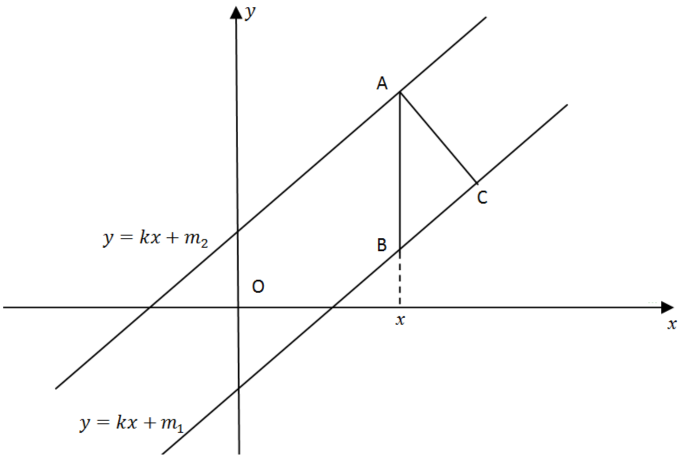

Рис. 2

Очевидно, что $|m_2 - m_1|$ будет равно длине отрезка AB. В прямоугольном треугольнике ACB угол $\angle A$ равен углу между прямой и положительным направлением оси Ox, поэтому $tg(\angle A) = k$. Тогда длина перпендикуляра $AC = \frac{AB}{\cos(\angle A)}$, при этом $\cos^2(\angle A) = \frac{1}{tg^2(\angle A)+1} = \frac{1}{k^2+1}$. Поэтому $AC = \frac{|m_2-m_1|}{\sqrt{k^2+1}}$.

Определение 3. Расстоянием между заданной точкой и параболой называется наименьшее расстояние между этой точкой и точками параболы.

Теорема 4. Если точка $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит параболе $y = ax^2 + bx + c$, расстояние между этой параболой и точкой $M_0(x_0, y_0)$ равно длине отрезка M_0M_1, то прямая M_0M_1 перпендикулярна касательной, проведенной к данной параболе в точке $M_1(x_1, y_1)$.

Доказательство. Нахождение расстояния между параболой $y = ax^2 + bx + c$ и точкой $M_0(x_0, y_0)$ сводится к нахождению наименьшего значения функции $f(x) = (ax^2 + bx + c - y_0)^2 + (x - x_0)^2$. Найдем стационарные точки этой функции. Так как $f'(x) = 2(ax^2 + bx + c - y_0) \cdot (2ax + b) + 2(x - x_0)$, то стационарные точки являются корнями уравнения

$$(2ax + b) \cdot (ax^2 + bx + c - y_0) + (x - x_0) = 0. \qquad (9)$$

Это кубическое уравнение имеет хотя бы один действительный корень. Пусть x_1 – действительный корень уравнения (6). Тогда число $2ax_1 + b$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к параболе $y = ax^2 + bx + c$ в точке с абсциссой x_1. Обозначим этот угловой коэффициент через k_1. Учитывая вышесказанное и то, что $ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$, из (9) имеем:

$$k_1 = -\frac{1}{\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}} = -\frac{1}{k_2},$$

где $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = k_2$ – угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_0(x_0, y_0)$. Отсюда следует, что касательная и прямая M_0M_1 взаимно перпендикулярны.

Определение 4. Расстоянием между параболой и прямой называется наименьшее расстояние между точками параболы и прямой.

Очевидно, что если парабола и прямая имеют общую точку, то расстояние между ними равно нулю.

Теорема 5. Пусть даны парабола $y = ax^2 + bx + c$ и прямая $y = kx + m$. Тогда расстояние между ними

$$d = \frac{|(k-b)^2 + 4a(m-c)|}{4|a|\sqrt{k^2+1}}. \qquad (10)$$

Доказательство. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой $y = kx + m$, а точка $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит параболе $y = ax^2 + bx + c$. Расстояние между этими точками равно длине отрезка M_0M_1. По доказанной теореме 2 прямая M_0, M_1 перпендикулярна прямой $y = kx + m$. Из теоремы 4 следует, что прямая M_0, M_1 перпендикулярна касательной к параболе, проведенной в точке $M_1(x_1, y_1)$. Значит, прямая $y = kx + m$ и эта касательная параллельны, откуда $2ax_1 + b = k$. Из этого равенства следует, что $x_1 = \frac{k-b}{2a}$. Вычислим y_1:

$$y_1 = a \cdot \left(\frac{k-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \frac{k-b}{2a} + c = \frac{(k-b)^2}{4a} + \frac{b(k-b)}{2a} + c = \frac{(k-b)^2 + 2b(k-b) + 4ac}{4a} =$$
$$= \frac{(k-b)(k-b+2b) + 4ac}{4a} = \frac{(k-b)(k+b) + 4ac}{4a}.$$

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $y = kx + m$ равно $d = \frac{|kx_1+m-y_1|}{\sqrt{k^2+1}}$. Подставляя значения x_1 и y_1 в числитель последнего равенства имеем:

$$|kx_1 + m - y_1| = \left|k \cdot \frac{k-b}{2a} + m - \frac{(k-b)(k+b) + 4ac}{4a}\right| = \left|\frac{2k(k-b) + 4am - (k-b)(k+b) - 4ac}{4a}\right| =$$
$$= \left|\frac{(k-b)(2k - k - b) + 4a(m-c)}{4a}\right| = \left|\frac{(k-b)^2 + 4a(m-c)}{4a}\right|,$$

откуда следует (9). Теорема доказана.

Нетрудно заметить, что выражение под модулем числителя формулы (9) есть дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + (b-k)x + c - m$. Если дискриминант неотрицателен, то парабола и прямая имеют общую точку, и расстояние между ними равно нулю.

Таким образом, для того чтобы найти расстояние между параболой $y = ax^2 + bx + c$ и прямой $y = kx + m$, достаточно составить квадратный трехчлен $ax^2 + (b-k)x + c - m$ и вычислить его дискриминант $D = (b-k)^2 + 4a(m-c)$. В случае $D \geq 0$ расстояние между параболой и прямой равно 0; а в случае $D < 0$ расстояние определяется по формуле

$$d = \frac{|D|}{4|a|\sqrt{k^2+1}}.$$

Расстояние между параболой $y = ax^2 + bx + c$ и прямой $y = kx + m$ можно найти и следующим способом (рис. 3).

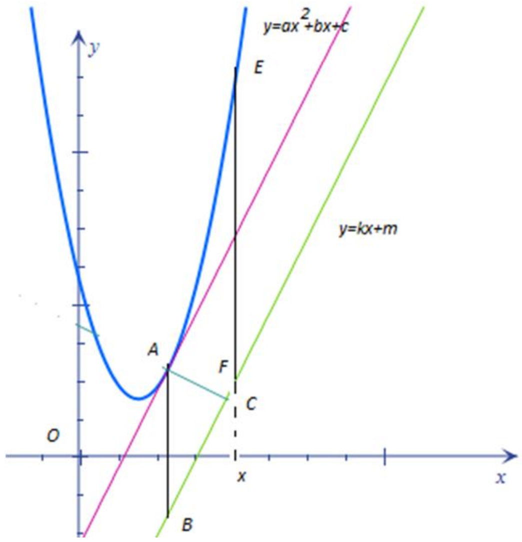

Рис. 3

Функция $f(x) = ax^2 + bx + c - (kx + m)$ $(a > 0)$ выражает длину отрезка, параллельного оси Oy, соединяющего точки параболы $y = ax^2 + bx + c$ и прямой $y = kx + m$ (длина отрезка FE). Очевидно, что длина этого отрезка пропорциональна длине перпендикуляра, опущенного из точки параболы на прямую. Поэтому, если функция $f(x) = ax^2 + bx + c - (kx + m)$ принимает наименьшее значение (длина отрезка AB), то соответствующая длина перпендикуляра (AC) равна расстоянию между параболой и прямой. Из прямоугольного треугольника ABC имеем $AC = \frac{AB}{\sqrt{k^2+1}}$.

Таким образом, для того чтобы найти расстояние между параболой $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ и прямой $y = kx + m$, надо найти наименьшее значение функции $f(x) = ax^2 + bx + c - (kx + m)$ и разделить полученное число на $\sqrt{k^2 + 1}$. В случае, когда $a < 0$ достаточно рассмотреть функцию $f(x) = -ax^2 - bx - c + (kx + m)$.

Теперь рассмотрим две параболы $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$. Предположим, что они не имеют общих точек. Аналогично, наименьшее расстояние между точками этих парабол назовем расстоянием между параболами. Абсциссы этих парабол меняются независимо друг от друга. Поэтому абсциссу первой параболы обозначим через x, а вторую – через z. Тогда квадрат расстояния между точками парабол

$$d^2 = \left(y(x) - y(z)\right)^2 + (x - z)^2$$

или

$$d^2 = (a_1x^2 + b_1x + c_1 - a_2z^2 - b_2z - c_2)^2 + (x - z)^2\,. \tag{11}$$

Имеет место

Теорема 6. Если параболы $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ не пересекаются, то расстояние между ними равно расстоянию между параллельными касательными, проведенными к этим параболам.

Доказательство. Допустим, что искомое расстояние равно расстоянию между точками $M_1(x_0, y(x_0))$ и $M_2(z_0, y(z_0))$. Подставим значение z_0 в (11). Тогда получим функцию

$$f(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1 - a_2z_0^2 - b_2z_0 - c_2)^2 + (x - z_0)^2. \tag{12}$$

Точка x_0 является стационарной точкой этой функции, т.е. она удовлетворяет уравнению

$$(2a_1x + b_1)(y(x) - y(z_0)) + x - z_0 = 0. \tag{13}$$

Отсюда имеем

$$(2a_1x_0 + b_1) \cdot \frac{y(x_0) - y(z_0)}{x_0 - z_0} = -1. \tag{14}$$

Первый множитель левой части равенства (11) является угловым коэффициентом касательной, проведенной к параболе $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ в точке с абсциссой x_0. Второй множитель – это угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $M_1(x_0, y(x_0))$ и $M_2(z_0, y(z_0))$. Равенство (14) выражает перпендикулярность этих прямых.

Аналогично, подставляя значение x_0 в (11), можно доказать перпендикулярность прямой M_1M_2 и касательной, проведенной к параболе $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ в точке $M_2(z_0, y(z_0))$. Отсюда следует доказательство теоремы.

Задача. Найти расстояние между параболами $y = -3x^2 + 8x - 9$ и $y = x^2 + 8x + 13$.

Решение. Используем теорему 6. Аргумент первой параболы обозначим через x, второй – через z. Тогда квадрат расстояния между точками парабол выражается формулой:

$$d^2 = (-3x^2 + 8x - 9 - z^2 - 8z - 13)^2 + (x - z)^2. \tag{15}$$

Из параллельности касательных имеем $-6x + 8 = 2z + 8$, откуда $z = -3x$. Т.е., если $M_1(x_0, y(x_0))$ – искомая точка первой параболы, то $M_2(-3x_0, y \cdot (-3x_0))$ есть искомая точка второй параболы. Эти точки должны удовлетворять условию (14). Имеем:

$$(-6x_0 + 8) \cdot \frac{-3x_0^2 + 8x_0 - 9 - ((-3x_0)^2 + 8(-3x_0) + 13)}{x_0 - (-3x_0)} = -1,$$
$$(-6x_0 + 8)(-12x_0 + 32x_0 - 22) + 4x_0 = 0,$$
$$(6x_0^2 - 16x_0 + 11)(-3x_0 + 4) + x_0 = 0,$$
$$-18x_0^3 + 72x_0^2 - 98x_0 + 44 = 0,$$
$$9x_0^3 - 36x_0^2 + 49x_0 - 22 = 0.$$

Нетрудно проверить, что $x_0 = 1$ является единственным действительным корнем последнего уравнения, отсюда находим $z_0 = -3$. Подставляя полученные значения x_0 и z_0 в (15) получаем $d = 2\sqrt{5}$.

Замечание 1. Из доказанной теоремы следует, что если $y = C_1x + C_2$ – уравнение общего перпендикуляра к касательным, который проходит через точки касания, то неизвестные коэффициенты C_1 и C_2 , а также расстояние между параболами можно найти из системы:

$$\begin{cases} a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = C_1x_0 + D, \\ a_2z_0^2 + b_2z_0 + c_1 = C_1z_0 + D, \\ 2a_1x_0 + b_1 = C_1^{-1}, \\ 2a_2z_0 + b_2 = C_2^{-1}, \\ d^2 = (a_1x^2 + b_1x + c_1 - a_2z^2 - b_2z - c_2)^2 + (x - z)^2. \end{cases} \tag{16}$$

Замечание 2. Обычно расстояние между гладкими кривыми находят методами вариационного исчисления. Решение нашей задачи сводится к нахождению экстремального значения функционала

$$V(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{17}$$

при условии, что x_0 принадлежит параболе $\varphi(x) = x^2 + 8x + 13$, а x_1 – параболе $\psi(x) = -3x^2 + 8x - 9$. Известно [3], что для функционала (17) экстремальными кривыми являются $y = C_1x + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые предстоит определить. Из условия трансверсальности и пересечения экстремали с параболами имеем:

$$\begin{cases} (-6x_0+8)C_1+1=0, \\ (2x_1+8)C_1+1=0, \\ C_1x_0+C_2=x_0^2+8x_0+13, \\ C_1x_1+C_2=-3x_1^2+8x_1+9. \end{cases} \quad (18)$$

Из этой системы находим: $C_1=\frac{1}{2}; C_2=-\frac{7}{2}; x_0=-3; x_1=1$.

Значит, экстремалью является прямая $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$, а расстояние между данными параболами

$$d=\int_{-3}^{1}\sqrt{1+\frac{1}{4}}dx=\frac{\sqrt{5}}{2}x\Big|_{-3}^{1}=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 4=2\sqrt{5}.$$

Нетрудно заметить, что систему (18) можно получить из системы (14).

В общем случае теоремы, аналогичные теоремам 4, 5 и 6, можно сформулировать и для других гладких кривых. Суть метода доказательства не меняется.

В рассмотренных задачах (теоремах) нахождение расстояния между кривыми приводит к неожиданному решению – нахождению расстояния между параллельными прямыми, что подчеркивает занимательность данных задач. Эти задачи можно использовать на факультативных занятиях для приобщения учащихся к творческому поиску, активизации их к самостоятельной исследовательской деятельности.

Список использованных источников

1. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др. 15-е изд. М.: Просвещение, 2007. 384 с.
2. Тракимус Ю.В. Основы вариационного исчисления. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. 73 с.

References

1. Algebra i nachala analiza: Uchebnik dlya 10-11 klassa obsheobrazovat. uchrezhdenij/ Alimov Sh.A., Kolyagin Ju.M., Sidorov Ju.V. i dr. 15-e izd. M.: Prosveshhenie, 2007. 384 p.
2. Trakimus Ju.V. Osnovy variatsionnogo ischisleniya. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2016. 73 p.

ON AN ENTERTAINING PROBLEM OF THE DISTANCE BETWEEN THE CURVES

Riskeldi Turgunbaev
TSPU named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan
Lola Sharipova
TIRE, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *In the school course of geometry, the distance from the point A to the straight line l is defined as the length of the perpendicular dropped from the point A to the line l. And the formulas of the distance both between a point and a straight line, and between parallel straight lines are deduced already in a high school course of the analytical geometry. The straight line as a graph of a linear function is defined in the school course of algebra, where the general form of a linear function is considered as the general equation of a straight line. The tangent is determined and its equation is given in the course of algebra and the beginnings of analysis. But neither the equation of a straight line passing through given two points nor the conditions of perpendicularity of straight lines are studied in the school course of mathematics. However, these facts can be fully explained to both high school students of secondary schools and academic lyceums. At the same time, one can consider problems on the distance between curves, in particular, between a straight line and a parabola, and also between parabolas. These problems can be studied in facultative classes in mathematics with students who show increased interest in the subject.*

In the present paper, the distance between a point and a curve is defined as the smallest distance from the given point to the points of the curves, and the distance between the curves is defined as the smallest distance between the points of these curves. In the case when the curves are graphs of certain differentiable functions, the following facts are proved with the help of the derivative: the distance between a point and a straight line is equal to the length of the perpendicular dropped from the point to the line; in the case of a parabola, the distance from a point to a curve is equal to the length of the perpendicular drawn to the tangent at the point of tangency; the distance between the parabola and the straight line is equal to the distance between the line and the tangent to the parabola parallel to this straight line; the distance between two parabolas is equal to the distance between the parallel tangents to these parabolas. An example of a solution to the problem on finding the distance between the parabolas is given. In this connection, the equation of a straight line passing through two given points is preliminarily derived, and a criterion for the perpendicularity of lines given by slope-intercept forms is proved.

Keywords*: point, straight line, perpendicular, curve, parabola, distance, derivative*