Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Погребний В.Д. Зіркові збіжності до порядкової збіжності. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 1(19). С. 160-163.

Pohrebnyi V. Star Convergences Are To Index Convergence. Physical and Mathematical Education. 2019. Issue 1(19). P. 160-163.

DOI 10.31110/2413-1571-2019-019-1-025
УДК 517.6

В.Д. Погребний
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
mathematicsspu@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1625-7893

ЗІРКОВІ ЗБІЖНОСТІ ДО ПОРЯДКОВОЇ ЗБІЖНОСТІ

АНОТАЦІЯ

В сучасному Аналізі широко використовується апарат різноманітних збіжностей, утворених різними структурами: топологічною, порядковою, алгебраїчною і т.д. Ці збіжності породжують топології, що використовуються при дослідженні неперервності операторів, зокрема, операторів топологічного вкладення топологічних лінійних просторів.

Формулювання проблеми. *Важливою збіжністю є порядкова збіжність в решітках, породжена структурою порядку. При вивченні властивостей конкретних збіжностей важливе значення мають аксіоми класу збіжності, що дозволяє робити висновки про одержану топологічну структуру. Важливими є також алгоритми одержання з даних збіжностей нових за допомогою так званих зіркових алгоритмів. Оскільки властивості порядкової збіжності, пов'язані з аксіомами класу збіжності, вивчені, то необхідно продовжити таке вивчення для зіркових до цієї збіжності. Метою даного дослідження є вивчення властивостей різних класів зіркових збіжностей до порядкової збіжності, як «чистих», так і «мішаних» типів.*

Матеріали і методи. *При дослідженнях використовуються методи просторів абстрактної збіжності, теорії зіркових збіжностей основних типів, аксіоматика класів збіжності у відповідних модифікаціях.*

Результати. *В результаті дослідження було встановлено: 1) «Чисті» зіркові збіжності до порядкової збіжності задовольняють умови перших трьох аксіом класу збіжності для всіх чотирьох типів зіркової збіжності – конфінальних, ізотонних, мурівських, квазі; 2) «Мішані» зіркові збіжності задовольняють вказані умови при деяких конкретизаціях: перша умова незалежно від першого і другого класів використаних піднапрямленостей; друга у модифікації для першого типу використаних піднапрямленостей; третя у модифікації відповідно першого – другого класів піднапрямленостей.*

Висновки. *Зіркові збіжності до порядкової збіжності мають передбачувані загальні властивості і можуть використовуватись при вивченні решіток конкретних типів і збіжностей, пов'язаних з порядком в них.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *збіжність, напрямленість, піднапрямленість, зіркові, клас, тип, аксіоми.*

ВСТУП

В сучасному Аналізі дуже важливе значення мають різноманітні збіжності, утворені на основі різних структур – топологічних, алгебраїчних, порядкових. Апарат збіжностей використовується в проблемах неперервності операторів, зокрема операторів вкладення просторів, оскільки ці збіжності породжують топологічні структури.

Важливою збіжністю є порядкова (o)-збіжність в решітках. Ця збіжність має важливі спеціальні властивості, зокрема, в плані утворення топологічних структур. Властивості одержаної топології залежать від того, які аксіоми абстрактної збіжності має дана збіжність. Ці аксіоми мають назву аксіоми класу збіжності. Порядкова збіжність деякі з цих аксіом задовольняє.

Суттєве значення має апарат зіркових збіжностей, що дозволяє одержувати з даної збіжності нові збіжності, які теж мають важливе значення. Тому поряд з дослідженням даної збіжності важливим є і дослідження зіркових до неї збіжностей.

Оскільки загальні властивості порядкової збіжності були досліджені (Погребний, 2011), то актуальним є дослідження властивостей зіркових до неї збіжностей.

Метою даної статті є дослідження властивостей зіркових до порядкової збіжності, пов'язаних з аксіомами класу збіжності.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичними основами дослідження є теорія порядкової збіжності і загальні теорії зіркових збіжностей основних типів.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Використовується апарат напрямленостей, основних класів піднапрямленостей, конструкції зіркових збіжностей основних типів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

На основі результатів про властивості порядкової збіжності, пов'язані з аксіомами класу збіжності (Погребний, 2011), дослідимо виконання цих умов для зіркових по відношенню до порядкової збіжності.

Спочатку будемо розглядати зіркові збіжності «чистих» типів. Нагадаємо основні поняття.

Нехай X – решітка. Напрямленість $S=\left(x_\alpha, \alpha\in A\right)$ називається зростаючою, якщо $\alpha_1\geq\alpha_2 \Rightarrow x_{\alpha_1}\geq x_{\alpha_2}$. S називається спадною, якщо $\alpha_1\geq\alpha_2 \Rightarrow x_{\alpha_1}\leq x_{\alpha_2}$. S називається порядково або (o)-збіжною до елемента $x_0\in X$, якщо виконані умови:

1. Існують спадна напрямленість $T=\left(y_\beta, \beta\in B\right)$ і зростаюча напрямленість $U=\left(z_\gamma, \gamma\in C\right)$, такі, що $\forall\beta_0\in B\forall\gamma_0\in C\exists\alpha_0\in A:\alpha\geq\alpha_0\Rightarrow z_{\gamma_0}\leq x_\alpha\leq y_{\beta_0}$.
2. $\sup\limits_{\gamma\in C} z_\gamma = x_0$.
3. $\inf\limits_{\beta\in B} y_\beta = x_0$.

Запис: $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x_0$, $x_0=(o)-\lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$. $(o)-\lim$ – єдиний, якщо існує.

Напрямленість $S=\left(x_\alpha, \alpha\in A\right)$ називається стаціонарною, якщо $\forall\alpha\in A\left[x_\alpha=x_0\in X\right]$. S називається квазістаціонарною, якщо $\exists\alpha_0\in A:\forall\alpha:\alpha\geq\alpha_0\left[x_\alpha=x_0\right]$.

Аксіома NA1 класу збіжності полягає в тому, що для даної абстрактної (σ)-збіжності кожна квазістаціонарна напрямленість (σ)-збігається до x_0.

Порядкова збіжність задовольняє аксіому NA1 (Погребний, 2011). Перевіримо її виконання для зіркових до (o)-збіжності збіжностей. Зіркові збіжності залежать від використаного типу піднапрямленостей:

1. Конфінальні.
2. Ізотонні.
3. Мурівські.
4. Квазі.

Відповідно розглядаються і зіркові до даної (σ)-збіжності:

1. Конфінальна зіркова $(c*\sigma)$.
2. Ізотонна зіркова $(i*\sigma)$.
3. Мурівська зіркова $(m*\sigma)$.
4. Квазізіркова $(q*\sigma)$.

Відомо, що $(c*\sigma)\Rightarrow(i*\sigma)\Rightarrow(m*\sigma)\Rightarrow(q*\sigma)$ (Погребний, 2003). Тому і $(c*o)\Rightarrow(i*o)\Rightarrow(m*o)\Rightarrow(q*o)$. Достатньо перевірити виконання умови NA1 для найбільш широкої $(q*o)$-збіжності.

Теорема 1. $(q*o)$-збіжність задовольняє умову NA1.

Доведення. Нехай напрямленість S квазістаціонарна, $T=\left(y_\beta, \beta\in B\right)$ – її довільна піднапрямленість. Тоді виконана умова: $\forall\alpha_0\in A\exists\beta_0\in B:\beta\geq\beta_0\Rightarrow\left\{y_\beta:\beta\geq\beta_0\right\}\subset\left\{x_\alpha:\alpha\geq\alpha_0\right\}$. Візьмемо α_0 з поняття квазістаціонарності напрямленості. Тоді знайшовши відповідне β_0, маємо, що при $\beta\geq\beta_0$ буде $y_\beta\equiv x_0$. Отже, T є квазістаціонарною. В силу виконання NA1 для (o)-збіжності, T порядково збігається до x_0. В силу довільності T, умова NA1 виконана для $(q*o)$ збіжності.

Теорему доведено.

Отже, для більш вузьких $(m*o)$, $(i*o)$, $(c*o)$ збіжностей умова NA1 теж виконана.

Перейдемо до аксіоми NA2. Вона полягає в тому, що якщо (S) є (σ)-збіжною до x_0, то всі її піднапрямленості теж збіжні до x_0. Для (o)-збіжності NA2 виконано (Погребний, 2011). Розглянемо її виконання для $(*o)$-збіжностей.

Теорема 2. Зіркові до (o)-збіжності мають властивість NA2.

Доведення. Оскільки при розгляді NA2 і $(*o)$-збіжностей використовуються піднапрямленості даного класу, то будемо розглядати цей процес для будь-якого фіксованого типу зіркової $(*o)$-збіжності. Нехай $x_\alpha \xrightarrow{*o} x_0$. Розглянемо довільну піднапрямленість, а для неї її довільну піднапрямленість U. Тоді є піднапрямленістю для S, а, в силу збіжності $(*o)$ S до x_0, U має піднапрямленість Φ, що (o)-збіжна до x_0. Але Φ є піднапрямленістю і для U. А це і означає, що T є $(*o)$-збіжною до x_0.

Теорему доведено.

Виконання умов NA1, NA2 для $(*o)$-збіжності означає можливість розглядати топологію $\tau(*o)$, породжену цією збіжністю, причому збіжність $(\tau(*o))$ буде не вузьчою, ніж $(*o)$-збіжність.

Таким чином, збіжності $(c*o)$, $(i*o)$, $(m*o)$, $(q*o)$ задовольняють умову NA2.

Перейдемо до аксіоми NA3. Вона полягає в тому, що якщо S не збіжна (σ) до x_0, то має таку піднапрямленість T, у якої жодна піднапрямленість U не збіжна (σ) до x_0. Відомо (Погребний, 2011), що (o)-збіжність, взагалі кажучи, не задовольняє умову NA3. Цікаво вияснити, як буде для $(*o)$-збіжностей.

Теорема 3. $(*o)$-збіжність задовольняє умову NA3.

Доведення. Нехай S не збігається $(*o)$ до x_0. Припустимо супротивне: кожна її піднапрямленість T має свою піднапрямленість U, яка $(*o)$ збіжна до x_0. А тоді кожна піднапрямленість Φ для U має свою піднапрямленість F, яка (o)-збіжна до x_0. Але напрямленість F є піднапрямленість напрямленості T. Це і означає $(*o)$-збіжність напрямленості S до x_0. А це неможливо за умовою. Протиріччя. Отже, для $(*o)$ умова NA3 виконана.

Теорему доведено.

Оскільки в загальному випадку, $(*(*\sigma)) = (*\sigma)$, то і $(*(*o)) = (*o)$.

Також, відомо, що при виконанні NA2 буде $(\sigma) \Rightarrow (*\sigma)$, а (o) має цю властивість, то $(o) \Rightarrow (*o)$. А ось NA3 (o)-збіжність не задовольняє. Тому умова $(*o) \Rightarrow (o)$ в загальному випадку не виконується. Значить, взагалі кажучи, $(*o) \neq (o)$.

Підводячи деякі підсумки, можна зазначити, що $(*o)$-збіжність всіх чотирьох класів має властивості NA1, NA2, NA3, отже, породжує на даній решітці X топологічну структуру $\tau(*o)$, яка віддільна, оскільки (o)-границя єдина, і збіжність в цій топології $(\tau(*o)) \supset (*o)$.

Перейдемо до зіркових збіжностей «мішаних» типів. Вони відрізняються від «чистих» типів тим, що при переході від напрямленості S до її піднапрямленості T може використовуватись один клас піднапрямленостей, а при переході від напрямленості T до її піднапрямленості U – інший. Для зручності пронумеруємо індексами $k, l = 1,2,3,4$ можливі класи піднапрямленостей і відповідні мішані зіркові збіжності:

1. Конфінальні.
2. Ізотонні.
3. Мурівські.
4. Квазі.

Таким чином, запис $(kl*o)$-збіжність означає наступну ситуацію:

1. При взятті піднапрямленості T для S, T має тип (k).
2. При взятті піднапрямленості U для T, U має тип (l).

Розглянемо випадки $k \neq l$, оскільки $(kk*o)$ означає не що інше, як «чисту» зіркову збіжність $(k*o)$, $k = 1,2,3,4$. Дослідимо виконання умови NA1 для мішаної $(kl*o)$-збіжності.

Теорема 4. $(kl*o)$-збіжність, $k, l = 1,2,3,4$ задовольняє умову NA1.

Доведення. Оскільки (o)-збіжність має властивість NA1, то для квазістаціонарної напрямленості (S), напрямленості T та U будуть квазістаціонарними при $k, l = 1,2,3,4$ і тоді U збіжна (o) до x_0, отже, S збіжна $(kl*o)$ до x_0.

Теорему доведено.

Перейдемо до умови NA2.

Теорема 5. $(kl*o)$ задовольняє умову $(NA2)_k$.

Доведення. Розглянемо два випадки, оскільки $k \neq l$.

1. $k < l$. Нехай T є довільною (k)-піднапрямленістю для S, а U – довільною (k)-піднапрямленістю для T. Тоді U є (k)-піднапрямленістю для S. Оскільки S збіжна $(kl*\sigma)$ до x_0, то U має (l)-піднапрямленість Φ, яка (o)-збіжна до x_0.

Таким чином, одержується така ситуація: кожна (k)-піднапрямленість U для T має (l)-піднапрямленість Φ, яка збіжна (o) до x_0. В силу довільності (k)-піднапрямленості T для (S), одержуємо виконання $(NA2)_k$ для $(kl*o)$-збіжності.

2. $k > l$. Нехай S, T, U, Φ мають той же смисл, що в п.1. Отже, кожна (k)-піднапрямленість U для T має (l)-піднапрямленість Φ, що збіжна (o) до x_0. Це означає, що T $(kl*o)$-збіжна до x_0. В силу довільності T, маємо виконання $(NA2)_k$ для $(kl*o)$-збіжності.

Теорему доведено.

Запис $(NA2)_k$ означає умову NA2 з використанням піднапрямленостей типу (k).

Перейдемо до умови NA3. В її запису треба вибирати піднапрямленість два рази. Тому для такого вказання випадку будемо записувати у вигляді $(NA3)_{kl}$.

Теорема 6. При $k \le l$, $(kl*o)$-збіжність задовольняє умову $(NA3)_{kl}$.

Доведення. Нехай (S) не збігається $(kl*o)$ до x_0. Припустимо, що кожна її (k)-піднапрямленість T має (l)-піднапрямленість U, яка $(kl*o)$-збіжна до x_0. Тоді для кожної (k)-піднапрямленості Φ до U існує (l)-піднапрямленість F до Φ, яка (o)-збіжна до x_0. При $k \le l$ буде, що F є (l)-піднапрямленістю для T. Маємо: кожна (k)-піднапрямленість T для S має (l)-піднапрямленість F, яка (o)-збіжна до x_0. Отже, S збіжна $(kl*\sigma)$ до x_0. Протиріччя. Це і означає виконання умови $(NA3)_{kl}$ для $(kl*\sigma)$-збіжності.

Теорему доведено.

Таким чином, мішані $(kl*o)$-збіжності мають властивості $(NA1)$, $(NA2)_k$, $(NA3)_{kl}$. Остання – при $k \le l$.

ОБГОВОРЕННЯ

Одержані результати дозволяють зробити висновок, що розгляд зіркових до порядкової збіжності доцільний, оскільки такі збіжності мають важливі властивості, пов'язані з аксіоматикою класу збіжності. Це означає, що такі збіжності породжують на даній решітці топологічну структуру, збіжність у якій не вужча, ніж зіркова збіжність, що розглядається. Одержані результати можуть використовуватись при вивченні порядкових збіжностей та зіркових до них у конкретних решітках.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Одержані результати дають підтвердження вивчення зіркових збіжностей до абстрактних збіжностей (Погребний, 2004; Погребний, 2006) у конкретному випадку порядкових збіжностей. Наступним етапом досліджень може бути аналогічне дослідження зіркових збіжностей до збіжності з регулятором, яке є дальшим розвитком порядкової збіжності.

Список використаних джерел

1. Погребной В.Д. Изотонная звездная сходимость. *Вісник Сумського державного університету.* Суми, 2003. №8(54). С. 85-87.
2. Погребний В.Д. Зіркові збіжності мішаного типу. Тези доповідей Х Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 13-15 травня 2004 р.), 2004. С. 385.
3. Погребний В.Д. Властивості зіркових збіжностей мішаного типу. Тези доповідей XI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 18-20 травня 2006 р.), 2006. С. 551.
4. Погребний В.Д. Порядкова збіжність з загальної точки зору. *Фізико-математична освіта*, 2011. Випуск 1(11). С. 28-31.

References

1. Pogrebnoj, V.D.(2003). Izotonnaja zvezdnaja shodimost' [Isotonic star convergence]. *Visnyk Sumskoho derzhavnoho universytetu – Bulletin of the Sumy State University*, 8(54), 85-87 [in Russian].
2. Pohrebnyi, V.D. (2004). Zirkovi zbizhnosti mishanoho typu [Star convergences of the mixed type] – The tenth International Scientific Conference acad. M. Kravchuk (pp. 385) Kyiv [in Ukrainian].
3. Pohrebnyi, V.D. (2006). Vlastyvosti zirkovykh zbizhnostei mishanoho typu [Properties of star convergences of the mixed type] – The eleventh International Scientific Conference acad. M. Kravchuk (pp. 551) Kyiv [in Ukrainian].
4. Pohrebnyi, V.D. (2011). Poriadkova zbizhnist z zahalnoi tochky zoru [Index convergence is from the general point of view]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 1(11), 28-31 [in Ukrainian].

STAR CONVERGENCES ARE TO INDEX CONVERGENCE

Valery Pohrebnyi

Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine

Abstract. *The vehicle of various convergences, formed different structures is widely used in modern Analysis: topological, index, algebra, etc. These convergences are generated by topologies which is used for research of continuity of operators, in particular, operators of topological embedding of topological linear spaces.*

Formulation of the problem. *Important convergence is index convergence in grates, descendant the structure of order. At the study of properties of concrete convergences the axioms of class of convergence have an important value, that allows to draw conclusion about the got topological structure. Important are also algorithms of receipt from this convergences of new by the so-called star algorithms. As properties of index convergence, related to the axioms of class convergences, studied, it is necessary to continue such study for star*