Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Кузьмич В.І., Кузьмич Л.В. Формування понять точки, відстані та прямолінійного розміщення точок засобами метричної геометрії у 7-9 класах. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 2(24). С. 74-79.

Kuz'mich V., Kuzmich L. Formation of concepts of point, distance and straight placements of points by means of metric geometry in 7-9 grades. Physical and Mathematical Education. 2020. Issue 2(24). P. 74-79.

DOI 10.31110/2413-1571-2020-024-2-010
УДК 372.851

В.І. Кузьмич
Херсонський державний університет, Україна
vikuzmichksu@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8150-3456
Л.В. Кузьмич
Херсонський державний університет, Україна
lvkuzmichksu@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6727-9064

ФОРМУВАННЯ ПОНЯТЬ ТОЧКИ, ВІДСТАНІ ТА ПРЯМОЛІНІЙНОГО РОЗМІЩЕННЯ ТОЧОК ЗАСОБАМИ МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У 7-9 КЛАСАХ

АНОТАЦІЯ

У роботі представлено концепцію формування понять точки, відстані між точками та прямолінійного розміщення точок, з використанням елементів метричної геометрії, у здобувачів базової середньої освіти на уроках геометрії та у позакласній роботі з математики.

Формулювання проблеми. *У сучасному шкільному курсі геометрії для базової школи фактично відсутні відомості про елементи неевклідових геометрій. У діючих підручниках з геометрії, навіть з поглибленим вивченням математики, про геометрію Лобачевського згадують лише у історичному аспекті. Зрозуміло, що це пов'язано зі значним рівнем складності та формалізації основ цієї геометрії. У даній роботі пропонується певний підхід до вирішення цього питання на базі використання елементів метричної геометрії, як такої, що найтісніше пов'язана зі шкільним курсом геометрії. Цей підхід дозволяє без особливих складнощів розпочати формування основних геометричних понять неевклідових геометрій (таких як відстань, прямолінійність) ще у сьомому класі базової школи. На наш погляд, таке формування слід проводити у класах з поглибленим вивченням математики, як на уроках геометрії, так і на заняттях гуртків та факультативів з математики. Відповідний матеріал може бути предметом учнівських досліджень та творчих робіт з геометрії.*

Матеріали і методи. *Основні результати роботи отримані з використанням методів метричної геометрії. При формуванні поняття прямолінійності використано поняття прямолінійного розміщення точок, розглянуте В.Ф. Каганом. Результати роботи були апробовані при читанні відповідного спецкурсу для здобувачів освітнього рівня «Магістр», за спеціальністю «014 Середня освіта (Математика)», у Херсонському державному університеті.*

Результати. *У роботі отримані конкретні приклади використання елементів неевклідових геометрій на уроках геометрії у базовій школі. Наведені відповідні формулювання понять відстані та прямолінійного розміщення точок, які демонструють неоднозначність їхнього інтуїтивного сприйняття. Вказані конкретні теми з геометрії, при вивченні яких ці формулювання та приклади можна використовувати, з метою формування поняття точки, відстані між точками, прямолінійності розміщення точок.*

Висновки. *З результатів роботи випливає висновок про те, що формування основних понять неевклідових геометрій можна розпочати з сьомого класу базової школи, використовуючи при цьому елементи метричної геометрії. Це дасть можливість у старших класах, на цій же основі, сформувати поняття плоского розміщення точок. Таким підходом може бути вирішене питання адекватного сприйняття учнями основних положень неевклідових геометрій.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *точка, відстань, пряма лінія, прямолінійне розміщення точок, шкільний курс геометрії.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Розглянута у роботі проблема полягає у способах введення у шкільний курс геометрії базової школи, та у різні види неформальної освіти з математики, узагальнених понять точки, відстані між точками та прямолінійності, з метою формування на їхній основі понять про неевклідові геометрії.

Аналіз актуальних досліджень. З другої половини XIX сторіччя розпочинається стрімкий розвиток неевклідових геометрій, спричинений побудовою Миколою Івановичем Лобачевським (1792–1856) нової геометрії, яка базувалась на запереченні п'ятого постулату геометрії Евкліда. У 1906 році французький математик Моріс Рене Фреше (1878–1973) увів у розгляд поняття метричного простору, що базувалось на понятті відстані між двома точками (метрики простору). З цього часу розпочинається розвиток метричної геометрії – геометричних структур та співвідношень між ними, що базуються лише на понятті відстані між точками метричного простору. Таким чином, метрична геометрія у значній мірі носить аналітичний характер, і у меншій мірі пов'язана з інтуїтивним сприйняттям таких основних геометричних понять як точка, пряма, площина, кут і т. п. З іншого боку, метрична геометрія розвивається як узагальнення геометрії Евкліда, і тому основні факти геометрії Евкліда можна отримати як частинні випадки відповідних фактів метричної геометрії. Це дає можливість застосувати метричний підхід до вивчення основних понять геометрії Евкліда, відійшовши від їхнього інтуїтивного сприйняття. У свою чергу, такий підхід дає можливість адекватно сприйняти особливості неевклідових геометрій, не вступаючи у логічні протиріччя з геометрією Евкліда, та інтуїтивним розумінням її основних понять. Слід відзначити достатньо прості аналітичні перетворення при встановленні елементарних фактів метричної геометрії, оскільки вони базуються на зрозумілих аксіомах відстані між точками метричного простору.

Основоположниками метричної геометрії вважають англійського математика Артура Келі (1821–1895) та австрійсько-американського математика Карла Менгера (1903–1985). Значний вклад у розвиток метричної геометрії зробив російський математик О. Д. Александров (1912–1999). Останнім часом метрична геометрія знайшла свої застосування у найрізноманітніших сучасних дослідженнях з біології, астрономії, ядерної фізики, комп'ютерних наук (комбінаторна оптимізація), архітектури та інженерії. До математиків, які внесли значний вклад у розвиток метричної геометрії слід віднести також Веніаміна Федоровича Кагана (1869–1953), який значну частину своєї наукової діяльності провів на фізико-математичному факультеті Одеського університету. У 1902 році В. Ф. Каган, обґрунтовуючи основи геометрії Евкліда, побудував геометричну систему, у якій незалежно від М. Р. Фреше використовував поняття точки, що не означується, та на основі якого означаються інші геометричні образи, що розглядаються як сукупності точок. Він увів поняття «відстані» між точками, що не змінюється при русі у просторі. Це дозволяє побудувати геометрію Евкліда не спираючись на інтуїтивне сприйняття її основних понять (Каган, 1902). В. Ф. Каган побудував вичерпну теорію прямої лінії, встановивши ізоморфізм множини дійсних чисел і точок прямої (Каган, 1956). При побудові теорії В. Ф. Каган використовував поняття «прямолінійної розміщеності» точок (Каган, 1963). Це поняття буде головним при викладенні основного матеріалу даної роботи. За висловленням авторів курсу метричної геометрії «…метрична геометрія залишається, можливо, одним із самих «елементарних» математичних методів» (Burago&Burago &Ivanov, 2001). У сучасній математиці розглядають значну кількість способів метризації просторів, наприклад, ультраметричні, або неархімедові простори з інваріантною метрикою (Savchenko &Zarichnyi, 2010).

У недавніх роботах з метричної геометрії досліджувались питання прямолінійного та плоского розміщення точок метричного простору (Dovgoshei&Dordovskii,2009; Кузьмич&Кузьмич, 2018; Kuz'mich, 2019). Засобами метричної геометрії можна отримати багато метричних співвідношень, які вивчаються у курсі шкільної геометрії (Kuz'mych &Savchenko, 2019). У даній роботі, як застосування цих досліджень, розглядаються приклади використання основних понять метричної геометрії з метою формування в учнів 7-9 класів базової школи узагальнених геометричних понять. Використання засобів метричної геометрії при формуванні у школярів найпростіших понять неевклідової геометрії є, на нашу думку, найбільш доступним для їх розуміння, оскільки спирається лише на поняття відстані між двома точками, і не потребує додаткових складних математичних понять.

Запропонований авторами підхід до формування основних геометричних понять слід розглядати як доповнення до існуючих підходів їх формування. У переважній більшості випадків таке формування слід проводити паралельно діючому, використовуючи різноманітні форми позакласної роботи з математики (математичні гуртки, факультативи, конкурси учнівських робіт і таке інше).

Мета статті. Метою статті є висвітлення підходу до формування у базовій школі понять основних геометричних об'єктів, таких як точка, відстань, прямолінійність засобами метричної геометрії, з метою адекватного сприйняття учнями відомостей про неевклідові геометрії.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В основу даного дослідження були покладені основні поняття і властивості теорії метричних просторів. Зокрема, в роботі використані базові відомості з метричної геометрії, яка узагальнює і розповсюджує на випадок довільного метричного простору основні поняття геометрії Евкліда та геометрії Лобачевського.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі використовується аксіоматичний метод означення метричного простору та аксіоматичне означення відношення «точка z лежить між точками x і y». Для демонстрації цього відношення використовується метод графічної інтерпретації та метод прямокутних координат.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Наведемо основні означення, що стосуються метричних просторів.

Означення 1. *Метричним простором називається сукупність непорожньої множини X елементів якої завгодно природи й однозначної дійсної невід'ємної функції $\rho(x; y)$ означеної для будь-яких елементів x і y з X і яка задовольняє такі умови:*

1) $\rho(x; y) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$,

2) $\rho(x; y) = \rho(y; x)$ (аксіома симетрії), *3) для будь-яких трьох елементів x, y і z виконується нерівність $\rho(x;y) \leq \rho(x;z) + \rho(z;y)$ (аксіома трикутника).*

При цьому елементи множини X називають точками метричного простору, функцію ρ – метрикою простору X, а числове значення функції $\rho(x;y)$ – відстанню між елементами (точками) x і y. Метричний простір X з метрикою ρ позначають $(X;\rho)$. Умови 1)-3) Означення 1 ще називають аксіомами відстані.

Звернемо увагу на те, що в Означенні 1 елементи множини X можуть мати будь-яку природу. Евклід описував точку наступним чином: «Точка є те, що не має частин» (Начала Евкліда, 1948). Це узгоджується з описом точки у шкільних підручниках: «Точка найпростіша геометрична фігура. Це єдина фігура, яку неможливо розбити на частини» (Мерзляк&Полонський&Якір, 2015). На наш погляд, поняття точки можна було б описати більш детально, вказавши, що точкою можна вважати будь-який об'єкт у тих випадках, коли не використовуються його структура, форма, властивості і т. п. Наприклад, у випадку коли потрібно порахувати кількість будівель на певній території та встановити відстані між ними, не враховуючи при цьому розміри, форму, кількість поверхів та приміщень цих будівель, хоча кожна з будівель має ці характеристики і вони можуть використовуватись надалі. При знайомстві з поняттям множини слід наголосити, що це сукупність об'єктів (елементів) об'єднаних між собою за певною ознакою: множина *учнів одного класу*, множина *парних чисел* і т. п. Усі елементи (точки) множини рівноправні між собою, однак при операціях з ними необхідно перевіряти точки на виконання ознаки, за якою вони належать до множини, а також можна використовувати цю ознаку при операціях з точками множини. Таке поняття точки дещо ширше від поняття точки у геометрії Евкліда, однак воно точніше відображає сучасний погляд на точку, як елемент множини. Запропонований опис точки, на наш погляд, повністю узгоджується з Означенням 1, і готує учнів до узагальненого сприйняття понять точки та відстані між точками у конкретних метричних просторах.

Перше знайомство з поняттям відстані між двома точками на рівні означення відбувається у сьомому класі при знайомстві з основними геометричними поняттями: «Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB. Якщо точки A і B збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю» (Мерзляк&Полонський&Якір, 2015). На цьому етапі вивчення математики, на наш погляд, ще рано говорити про інші означення відстані між точками, хоча можна звернути увагу учнів на те, що при русі по місту найменша відстань, яку вони повинні подолати між двома об'єктами, не завжди вимірюється довжиною відрізка що з'єднує ці об'єкти, а може її перевищувати. Ще й більш того, таких шляхів (геодезичних ліній) може бути декілька. Це може стати першим прикладом неоднозначності (відносності) поняття відстані між двома точками, крім того, це допоможе підготувати учнів до сприйняття надалі нерівності трикутника (умова 3 Означення 1). З цією нерівністю учні знайомляться теж у 7 класі: «Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін…» (Мерзляк&Полонський&Якір, 2015).

У зв'язку з нерівністю трикутника, як правило, робиться висновок про характеристичну властивість трьох точок, що належать одній прямій, та вводиться поняття «точка B міститься між точками A і C», що є ознакою «прямолінійного розміщення» (Каган, 1963) точок A, B, C: «якщо для трьох точок A, B і C виконується рівність $AB = AC + CB$, то точка C є внутрішньою точкою відрізка AB» (Мерзляк&Полонський&Якір, 2015). Цілеспрямоване і більш детальне знайомство учнів з елементами метричної геометрії слід розпочати, на наш погляд, у дев'ятому класі. У курсі геометрії дев'ятого класу вивчається такий базовий для елементів метричної геометрії матеріал, як елементи тригонометрії, теорема косинусів, теорема синусів, нерівність трикутника, розв'язування трикутників, декартові координати на площині, скалярний добуток векторів. Крім того, паралельне вивчення у курсі алгебри властивостей функцій дає можливість розпочати вивчення конкретних метричних просторів, наприклад, простору лінійних (або квадратичних) функцій, означених на відрізку.

Тепер перейдемо до фактичного матеріалу, який пропонується для вивчення. Спочатку сформулюємо дещо спрощене, але більш об'ємне, означення метричного простору та відстані між його точками. Це означення використовує поняття множини та її елементів, що сформовані у восьмому класі (Мерзляк&Полонський&Якір, 2016).

Означення 2. *Непорожню множину X елементів якої завгодно природи будемо називати метричним простором, якщо кожній парі $(x;y)$ різних елементів цієї множини за певним правилом ρ поставлене у відповідність єдине додатне число $\rho(x;y)$, що називається відстанню між елементами x і y, і яке задовольняє умовам:*

1) для будь-яких двох різних елементів x і y відстань між елементами x і y дорівнює відстані між елементами y і x, тобто виконується рівність $\rho(\mathrm{x};\mathrm{y}) = \rho(\mathrm{y};\mathrm{x})$ (умова симетрії);

2) для будь-яких трьох різних елементів x, y, z відстань між елементами x і y не більша ніж сума відстаней між елементами x і z та між елементами z і y, тобто виконується нерівність $\rho(\mathrm{x};\mathrm{y}) \leq \rho(\mathrm{x};\mathrm{z}) + \rho(\mathrm{z};\mathrm{y})$ (нерівність трикутника).

Означення 2 метричного простору, у такій формі як воно записане, слід подавати у старших класах, а у дев'ятому класі його доцільно подати (як і означення функції) в описовій формі, використовуючи достатню кількість прикладів. При цьому, можна розділити формулювання умов 1) і 2) означення на словесну і аналітичну форми.

Вкажемо декілька найпростіших прикладів метричних просторів, доступних для легкого засвоєння учнями.

Приклад 1. Найпростішим прикладом метричного простору є множина усіх точок числової осі. Такий простір називають одновимірним арифметичним евклідовим простором, і позначають R^1. Як відомо (Мерзляк&Полонський&Якір, 2017), відстань між двома точками x і y числової осі знаходять як абсолютну величину (модуль) різниці відповідних чисел x і y: $\rho(x;y) = |x - y|$.

Виконання усіх умов Означення 2 для простору R^1 перевіряється досить просто. У 9-му класі їх можна перевірити за допомогою властивостей множини дійсних чисел, а у 7-му на інтуїтивному рівні, використовуючи числову пряму.

У дев'ятому класі можна розглянути більш складніший приклад метричного простору – координатну площину, яка детально вивчається у курсі геометрії для дев'ятого класу (Мерзляк&Полонський&Якір, 2017).

Приклад 2. Множина точок координатної площини є метричним простором. Такий простір називають двовимірним арифметичним евклідовим простором, і позначають R^2.

За відстань між двома точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ простору R^2 беруть довжину відрізка M_1M_2, що знаходиться за формулою: $M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (Мерзляк&Полонський&Якір, 2017).

При перевірці виконання умов Означення 2 для простору R^2 деякі труднощі можуть виникнути лише при перевірці умови 2), однак, вони цілком під силу учням 9-го класу.

На координатній площині можна по іншому означити відстань між точками, при цьому отримується інший метричний простір.

Приклад 3. Візьмемо в якості відстані між точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ координатної площини число: $\rho(M_1; M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Цей простір позначають R_1^2.

Легко перевіряється виконання усіх умов Означення 2, отже простір R_1^2 є метричним. Цей простір цікавий тим, що його суть легко пояснити навіть учням сьомого класу. За цією метрикою на координатній площині найменшу відстань між точками M_1 і M_2 можна подолати йдучи паралельно координатним осям (по катетах прямокутного трикутника, для якого відрізок M_1M_2 є гіпотенузою). Подібна ситуація виникає у місті з прямокутним розташуванням вулиць. Це один із прикладів, де поняття відстані між точками не співпадає з класичним, як довжини відрізка, що з'єднує ці точки.

Наведемо ще один простий випадок метричного простору точок координатної площини.

Приклад 4. Візьмемо у якості відстані між точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ координатної площини число: $\rho(M_1; M_2) = max\{|x_1 - x_2|;\ |y_1 - y_2|\}$.

Перевірити виконання умов Означення 2 для такого простору також не складно, тому розглянутий простір є метричним, його позначають R_0^2. Простір R_0^2 теж може бути прикладом простору, у якому відстань між точками не завжди є довжиною відрізка, що з'єднує ці точки.

Наступний приклад демонструє неоднозначність поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору.

Приклад 5. Розглянемо у просторі R_0^2 чотири точки: $M_1(0; 1), M_2(0; -1), M_3(-1; 0), M_4(1; 0)$. Знайдемо за метрикою простору відстані між цими точками: $\rho(M_1; M_2) = 2$, $\rho(M_1; M_3) = 1$, $\rho(M_1; M_4) = 1$, $\rho(M_2; M_3) = 1$, $\rho(M_2; M_4) = 1$, $\rho(M_3; M_4) = 2$.

Слід звернути увагу на рівності, які при цьому виконуються:

$$\rho(M_1; M_2) = \rho(M_1; M_3) + \rho(M_2; M_3) = 1 + 1 = 2;$$
$$\rho(M_1; M_2) = \rho(M_1; M_4) + \rho(M_2; M_4) = 1 + 1 = 2;$$
$$\rho(M_3; M_4) = \rho(M_1; M_3) + \rho(M_1; M_4) = 1 + 1 = 2;$$
$$\rho(M_3; M_4) = \rho(M_2; M_3) + \rho(M_2; M_4) = 1 + 1 = 2.$$

Геометрично, на координатній площині, точки M_1, M_2, M_3, M_4 є вершинами квадрата, довжина сторони якого дорівнює $\sqrt{2}$. У геометрії Евкліда довжина діагоналі квадрата менша за суму довжин двох його сторін, а у цьому прикладі вони виявляються рівними. Більш того, з кожної з отриманих чотирьох рівностей у геометрії Евкліда слідує, що усі три точки, які беруть участь у рівності, повинні лежати на одній прямій.

Цей приклад наочно демонструє відмінність понять відстані між точками однієї й тієї ж множини при різному означенні відстані.

Розглянемо більш детально поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору. Воно є частинним випадком Означення 2 у випадку, коли нерівність трикутника перетворюється у рівність.

Означення 3. *Будемо казати, що точки x, y, z метричного простору (X, ρ) розміщені прямолінійно у цьому просторі, якщо виконується рівність $\rho(x; y) = \rho(x; z) + \rho(z; y)$.*

При виконанні рівності у Означенні 3 природно казати, що точка z «лежить між» точками x і y, або називати її «внутрішньою» для точок x, y, z. Одночасно, про точку x (точку y) можна казати, що вона «лежить поза» точками y і z (точками x і z), або називати її «крайньою» для точок x, y, z (Мерзляк&Полонський&Якір, 2015).

На основі Означення 3 можна дати означення прямолінійного розміщення множини точок метричного простору. Для цього слід вимагати прямолінійного розміщення будь-яких трьох точок цієї множини.

Означення 4. *Будемо казати, що множина точок метричного простору прямолінійно розміщена, якщо будь-які три точки цієї множини прямолінійно розміщені.*

Найпростішим прикладом прямолінійно розміщеної множини є простір R^1, оскільки з властивостей множини дійсних (натуральних, цілих, раціональних) чисел слідує, що з трьох різних чисел x, y, z одне з них буде найменшим, друге – найбільшим, а третє – проміжним.

Наведемо більш складний приклад прямолінійно розміщеної множини.

Приклад 7. Розглянемо множину лінійних функцій $y = kx$, означених на відрізку $x \in [0; 1]$. Графіками цих функцій є прямі лінії, що проходять через початок координат. На відрізку $[0; 1]$ графіками будуть відрізки цих прямих.

Уведемо метрику у цій множині, вибравши за відстань між двома різними її елементами $y = k_1x$ і $y = k_2x$ число: $\rho(k_1x\ ; k_2x) = max_{x\in[0;1]}|k_1x - k_2x| = |k_1 - k_2|$. Можна показати, що при такому виборі відстані між елементами усі умови Означення 2 виконуються, тобто, множина функцій $y = kx$ є метричним простором. Прямолінійне розміщення будь-яких трьох точок цього простору слідує з відповідної властивості точок числової осі. З Означення 4 випливає прямолінійне розміщення усієї множини точок простору.

Розглянутий простір є підпростором більш загального метричного простору $C_{[a;b]}$ неперервних на відрізку $[a; b]$ функцій. Однак, простір $C_{[a;b]}$ слід вивчати у старших класах, після знайомства з неперервними функціями, їх властивостями та другою теоремою Вейєрштрасса (Мерзляк&Номіровський&Полонський&Якір, 2011) про існування найбільшого та найменшого значень функції неперервної на відрізку.

Досить ґрунтовно з властивостями функцій учні знайомляться у дев'ятому класі, однак, з окремими елементарними функціями та їх найпростішими властивостями, зокрема з лінійною функцією, знайомство розпочинається ще із сьомого класу.

Прямолінійне розміщення точок може інтуїтивно асоціюватись з прямолінійністю розміщення точок у геометрії Евкліда, однак, це не завжди вірно. Наступний приклад демонструє цю своєрідність прямолінійного розміщення точок у метричному просторі.

Приклад 8. У Прикладі 5 ми встановили, що будь-які три точки, із розглянутих чотирьох M_1, M_2, M_3, M_4, розміщені прямолінійно, а отже, за Означенням 4, усі чотири точки розміщені прямолінійно у просторі R_0^2. Цей результат дещо відрізняється від інтуїтивного сприйняття поняття прямої лінії у геометрії Евкліда, оскільки ці чотири точки на координатній площині є вершинами квадрата.

Ми розглянули декілька основних понять метричної геометрії, та декілька найпростіших метричних просторів, з якими можна познайомити учнів базової школи. Вчитель може на власний розсуд вибрати рівень обґрунтованості результатів – інтуїтивний, графічний або строгий аналітичний. У старших класах можна розглянути більш складні метричні простори, що потребують понять неперервності, диференційованості та інтегрованості функції.

ОБГОВОРЕННЯ

Наведений у роботі матеріал можна вважати першим знайомством з основами метричної геометрії. За наведеними зразками можна створювати і розв'язувати велику кількість різноманітних задач на взаємне розміщення основних елементарних функцій у різних метричних просторах, будувати і досліджувати різні геометричні образи у цих просторах. Цей матеріал використовувався в межах спецкурсу для здобувачів освітнього рівня «Магістр», за спеціальністю «014 Середня освіта (Математика)» у Херсонському державному університеті. Результати опитування студентів 1-го курсу про їх знання суті не Евклідової геометрії (геометрії Лобачевського), та зв'язку з геометрією Евкліда, свідчили про повне її нерозуміння. Це розуміння з'являється лише після вивчення курсів «Проективної геометрії» та «Основ геометрії», на старших курсах. Така ситуація зумовлена відсутністю елементів неевклідових геометрій у шкільному курсі математики. Результати викладання спецкурсу вказують на те, що у студентів значно зростає інтерес до використання елементів метричної геометрії при аналізі матеріалу шкільного курсу геометрії. При цьому, значно розширилось коло задач дослідницького характеру, які можна запропонувати учням базової школи для творчої роботи над відповідними темами з геометрії. Слід зазначити, що наведений у даній роботі матеріал доцільно використовувати у класах з поглибленим вивченням математики. На уроках геометрії слід знайомити учнів лише з узагальненими поняттями точки, відстані між точками, прямолінійності розміщення точок, знайомити з найпростішими прикладами метричних просторів, а також розглядати найпростіші приклади неевклідовості цих понять (неінтуїтивного їх сприйняття). З більш складними прикладами метричних просторів та їх властивостей краще знайомити учнів у межах неформальної освіти, використовуючи при цьому різні її види – математичні гуртки, факультативи з геометрії, дослідницькі групи, конкурси наукових робіт і таке інше.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримані у даній роботі результати вказують на те, що формування узагальнених геометричних понять про точку, відстань та прямолінійність можна розпочинати на уроках геометрії вже з 7-го класу базової школи. Знайомство учнів з елементами неевклідових геометрій доцільно проводити при вивченні відповідних тем на уроках геометрії, і, паралельно з цим, за різними видами неформальної освіти.

Подальші дослідження у цьому напрямку повинні забезпечити можливість формування засобами метричної геометрії узагальнених понять кута і плоского розміщення точок. Ці поняття природним чином повинні узагальнювати класичні (Евклідові) поняття кута і площини.

Список використаних джерел

1. Каган В. Ф. Система посылок, определяющих евклидову геометрию. *Зап. матем. отд. О-ва естествознания*. Одесса, 1902. № 20. С. 67-105.
2. Каган В.Ф. *Основания геометрии. Часть 2.* М.-Л.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
3. Каган В.Ф. *Очерки по геометрии.* М.: Издательство Московского университета, 1963. 571 с.
4. Burago D., Burago Y., Ivanov S. *A course in metric geometry*. AMS: Providence, Rhode Island. 2001. 415 c.
5. Savchenko A., Zarichnyi M. Metrization of free groups on ultrametric spaces. *Topology and its applications*,2010. 157(4). С. 724–729. DOI: 10.1016/j.topol.2009.08.015
6. Dovgoshei A. A., Dordovskii D. V. Betweenness relation and isometric imbeddings of metric spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2009. Vol. 61, No. 10. P. 1556-1567.
7. Кузьмич В. І., Кузьмич Л. В. Вивчення властивостей прямолінійно та плоско розміщених множин точок метричного простору. *Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки»*. Черкаси: Вид-во ЧНУ ім. Богдана Хмельницького, 2018. Випуск № 9. С. 77-89. DOI: 10.31651/2524-2660-2018-9-77-89
8. Kuz'mich V. I. Geometric properties of metric spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2019. Vol. 71, No. 3. P. 435-454. DOI: 10.1007/s11253-019-01656-1
9. Kuz'mych, V. I., Savchenko A. G. Geometric relations in an arbitrary metric space. *Matematychni Studii*, 2019. 52(1). С. 86-95. DOI: 10.30970/ms.52.1.76-85
10. *Начала Евклида. Книги I-VI.* / пер.: Д. Мордухай-Болтовский. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 447 с.
11. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. *Геометрія. Пропедевтика поглибленого вивчення* : навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики. Х.: Гімназія, 2015. 192 с.
12. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. *Алгебра* : підруч. для 8 кл. з поглибленим вивченням математики. Х.: Гімназія, 2016. 384 с.
13. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. *Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики* : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х.: Гімназія, 2017. 304 с.
14. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. *Алгебра. 11 клас* : підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень, проф. рівень. Х. : Гімназія, 2011. 431 с.

References

1. Kagan, V.F. (1902). *Sistema posylok, opredelyayushchikh yevklidovu geometriyu. [A system of premises defining Euclidean geometry]*. Odessa [in Russian].
2. Kagan, V.F. (1956). *Osnovanija geometrii. Chast' 2. [Geometry bases. Part 2]*. M.-L.: Gostekhizdat [in Russian].
3. Kagan, V.F. (1963) *Ocherki po geometrii. [Geometry essays]*. M.: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta [in Russian].
4. Burago, D., Burago, Y. & Ivanov S. (2001). *A course in metric geometry*. AMS: Providence, Rhode Island [in English].
5. Savchenko A. & Zarichnyi M. (2010). Metrization of free groups on ultrametric spaces. *Topology and its applications*, Volume 157, Issue 4. P. 724–729. DOI: 10.1016/j.topol.2009.08.015 [in English].
6. Dovgoshei, A.A. & Dordovskii, D.V. (2009). Betweenness relation and isometric imbeddings of metric spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*. Vol. 61, No. 10. P. 1556-1567 [in English].
7. Kuz'mych, V.I. & Kuz'mych, L.V. (2018). Vyvchennya vlastyvostey pryamoliniyno ta plosko rozmishchenykh mnozhyn tochok metrychnoho prostoru. [Investigation of the properties of the linear and plane-placeable multiples of a point of metric space]. *Visnyk Cherkas'koho universytetu. Seriya «Pedahohichni nauky» – Bulletin of Cherkasy University. Pedagogical Sciences Series*, 9, 77-89. DOI: 10.31651/2524-2660-2018-9-77-89 [in Ukrainian].
8. Kuz'mich, V.I. (2019). Geometric properties of metric spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*. Vol. 71, No. 3. P. 435-454. DOI: 10.1007/s11253-019-01656-1 [in English].
9. Kuz'mych, V.I. & Savchenko A.G. (2019). Geometric relations in an arbitrary metric space. *Matematychni Studii*, V.52, No. 1. P. 86-95. DOI: 10.30970/ms.52.1.76-85 [in English].
10. *Nachala Yevklida. Knigi I-VI. [Elements of Euclid. Books I-VI]* (D. Mordukhai-Boltovsky Trans.). M.-L.: Gostekhizdat (1948) [in Russian].
11. Merzlyak, A.H., Polons'kyy, V.B. & Yakir, M.S. (2015). *Heometriya. Propedevtyka pohlyblenoho vyvchennya* : navch. posib. dlya 7 kl. z pohlyblenym vyvchennyam matematyky. [Geometry. Propedeutics of in-depth learning : tutorial tool for 7 grade with in-depth study of mathematics]. Kharkiv: Himnaziya [in Ukrainian].
12. Merzlyak, A.H., Polons'kyy, V.B. & Yakir, M.S. (2016). *Alhebra* : pidruch. dlya 8 kl. z pohlyblenym vyvchennyam matematyky. [*Algebra* : textbook for 8 classes with in-depth study of mathematics]. Kharkiv: Himnaziya [in Ukrainian].
13. Merzlyak, A.H., Polons'kyy, V.B. & Yakir, M.S. (2017). *Heometriya dlya zahal'noosvitnikh navchal'nykh zakladiv z pohlyblenym vyvchennyam matematyky* : pidruch. dlya 9 kl. zahal'noosvit. navch. Zakladiv. [*Geometry for secondary schools with in-depth study of mathematics* : textbook. for 9 classes. general education. textbook institutions]. Kharkiv: Himnaziya [in Ukrainian].
14. Merzlyak, A.H., Nomirovs'kyy, D.A., Polons'kyy, V.B. & Yakir, M.S. (2011). *Alhebra. 11 klas* : pidruch. dlya zahal'noosvit. navchal'n. zakladiv : akadem. riven', prof. riven'. [*Algebra. Grade 11* : textbook for general educational institutioni : academic level, professional level]. Kharkiv: Himnaziya [in Ukrainian].

FORMATION OF CONCEPTS OF POINT, DISTANCE AND STRAIGHT PLACEMENTS OF POINTS BY MEANS OF METRIC GEOMETRY IN 7-9 GRADES

Valerii Kuz'mich, Liudmyla Kuzmich

Kherson State University, Ukraine

Abstract. *The paper presents the concept of forming the concepts of point, the distance between points and rectilinear placement of points, using elements of metric geometry, in middle school pupils in geometry lessons and extracurricular work in mathematics.*

Formulation of the problem. *In the modern school course of geometry for middle school, there is virtually no information about the elements of non-Euclidean geometries. In current textbooks on geometry, even with an in-depth study of mathematics, Lobachevsky's geometry is mentioned only in the historical aspect. This is due to the significant level of complexity and formalization of the basics of this geometry. This paper proposes a certain approach to solving this problem based on the use of elements of metric geometry, as one that is most closely related to the school course of geometry. This approach allows without much difficulty to begin the formation of basic geometric concepts of non-Euclidean geometries (such as point, distance, straightness) in the seventh grade of middle school. In our opinion, such formation should be carried out in classes with an in-depth study of mathematics, both in geometry lessons and in classes and electives in mathematics. Relevant material can be the subject of student research and creative work in geometry.*

Materials and methods. *The main results of the work are obtained using the methods of metric geometry. While forming the concept of straightness authors used the concept of rectilinear placement of points, considered by V.F. Kagan. The results of the work were tested during the reading of the relevant special course for students of the educational level "Master", specialty "014 Secondary Education (Mathematics)", at Kherson State University.*

Results. *The paper provides specific examples of the use of elements of non-Euclidean geometries in geometry lessons in middle school. Appropriate formulations of the concepts of point, distance, and rectilinear placement of points are given, which demonstrate the ambiguity of their intuitive perception. Specific topics in geometry are indicated, in the study of which these formulations and examples can be used to form a concept of a point, the distance between points, the straightness of the location of points.*

Conclusions. *From the results of the work, it follows that the formation of the basic concepts of non-Euclidean geometries can be started from the seventh grade of middle school, using elements of metric geometry. This will allow in the senior classes of junior high school, on the same basis, to form a concept of flat placement of points. This approach can solve the problem of adequate pupils' perception of the basic provisions of non-Euclidean geometries.*

Keywords: *point, distance, straight line, rectilinear placement of points, school course of geometry.*