

Scientific journal  
**PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION**  
Has been issued since 2013.

Науковий журнал  
**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА**  
Видається з 2013.



<http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/>

*Шамрай С. Теорема шкільного курсу планіметрії: аналіз типів та способів доведень // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми : СумДПУ ім.А.С.Макаренка, 2013. – № 1 (1). – С. 46-55.*

**Світлана Шамрай**

*Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна*

### **ТЕОРЕМИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ: АНАЛІЗ ТИПІВ ТА СПОСОБІВ ДОВЕДЕНЬ**

Сучасний курс геометрії основної школи забезпечує базову геометричну підготовку, достатню для продовження освіти в старшій або професійній школі. Виділяються три ступені вивчення планіметрії: 1-4 класи, 5-6 класи, 7-9 класи. У 1-4 класах здійснюється пропедевтична підготовка учнів до вивчення цього курсу.

Основна мета вивчення геометрії в 5-6 класах ввести на наочно-інтуїтивному рівні поняття про основні фігури на площині і простіші геометричні тіла, їх побудову і вимірювання, розширити уявлення учнів, здобуті в попередніх класах, про істотні ознаки геометричних фігур, уміння обчислювати геометричні величини (довжини, площі, об'єми деяких фігур) за формулами. Геометричні поняття, операції і відношення дістають математичне спрямування.

Мета курсу геометрії в 7-9 класах – систематичне вивчення властивостей геометричних фігур на площині; засвоєння елементів стереометрії на наочно-інтуїтивному рівні; вироблення вмінь будувати геометричні фігури і застосовувати їх властивості при вивченні суміжних дисциплін; подальше вивчення величин; ознайомлення учнів із застосуванням аналітичного апарату (елементи тригонометрії і алгебри, вектори і координати) до розв'язування задач. Курс геометрії стає базовим курсом, який забезпечує систему фундаментальних знань з геометрії для всіх учнів.

О.В. Погорелов найціннішим у геометрії вважав доведення: «Головне завдання викладання геометрії в школі – навчити учня логічно міркувати, аргументувати свої твердження, доводити ... навряд чи знайдеться хоча б один, кому б не довелося міркувати, аналізувати, доводити» [3, с. 14].

Вивчення теорем і їх доведень в курсі геометрії починається з 7 класу і посідає значне місце в навчальному процесі. Теорема і її доведення розвивають логіку мислення учнів, вчать методам доведення, сприяють усвідомленню аксіоматичної побудови математики. Доведення дають змогу учням засвоїти евристичні прийоми розумової діяльності, формують позитивні якості особистості, зокрема обґрунтованість суджень, стислість, чіткість висловлення думки.

Саме тому завжди актуальними будуть дослідження пов'язані з навчанням доводити твердження ще у шкільному віці. Такі дослідження можуть серед іншого ґрунтуватися і на аналізі теорем, які пропонуються авторами різних діючих підручників – їх бачення структури і логіки курсу може бути визначальним у становленні логічного мислення майбутнього покоління.

Нами проведено аналіз теорем планіметрії, які пропонуються у діючих і рекомендованих МОН підручниках шкільного курсу планіметрії різних авторів (таблиця 1):

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владимірова Н.Г.
2. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.
3. Погорєлов О.В.

Теореми розподілялися за підручником, типом теореми та способом доведення.

**Таблиця 1**

№	Теорема	Підручник	Тип теореми	Спосіб доведення
<b>7 клас</b>				
1	Якщо пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то вона перетинає тільки одну з двох інших	[3]	Пряма	Синтетичний
2	Сума суміжних кутів дорівнює $180^\circ$	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний
3	Вертикальні кути рівні	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний
4	Через кожну точку прямої можна провести перпендикулярну до неї пряму і до того ж тільки одну	[2], [3]	Пряма	Аналітико-синтетичний
5	Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний
6	Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний
7	У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний
8	Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений	[1], [2], [3]	Обернена	Синтетичний
9	У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний
10	Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні	[3]	Пряма	Від супротивного
		[1], [2]		Синтетичний
11	Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі другого, то такі трикутники рівні	[3] (задача) [1], [2]	Пряма	Синтетичний
12	У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута – більша сторона	[1]	Пряма	Синтетичний
13	Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін	[1]	Пряма	Аналітичний

№	Теорема	Підручник	Тип теореми	Спосіб доведення
14	Дві прями, паралельні третій, паралельні одна одній	[1], [3]	Пряма	Від супротивного
15	Якщо внутрішні різносторонні кути рівні або сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює $180^\circ$ , то прями паралельні	[1], [3]	Пряма	Від супротивного
		[2]		Аналітичний
16	Якщо дві паралельні прями перетнуті третьою прямою, то внутрішні різносторонні кути рівні, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює $180^\circ$	[1], [2], [3]	Обернена	Аналітичний
17	Сума кутів трикутника дорівнює $180^\circ$	[1], [2], [3]	Пряма	Аналітичний
18	Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним	[1], [2], [3]	Пряма	Аналітичний
19	З будь-якої точки, що не лежить на даній прямій, можна опустити на цю пряму перпендикуляр і тільки один	[3]	Пряма	Аналітичний
20	Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину перпендикулярів до сторін трикутника, проведених через середини цих сторін	[3]	Пряма	Синтетичний
	Навколо будь-якого трикутника можна описати коло і до того ж тільки одне	[2]		
	Навколо кожного трикутника можна описати лише одне коло. Його центром є точка перетину серединних перпендикулярів двох сторін трикутника	[1]		
21	Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис	[3]	Пряма	Синтетичний
	У будь-який трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне	[2]		Аналітичний
	У кожний трикутник можна вписати лише одне коло. Його центром є точки перетину двох бісектрис трикутника	[1]		Синтетичний
22	ГМТ, рівновіддалених від двох даних точок, є пряма, яка перпендикулярна до відрізка, що сполучає ці точки і проходить через його середину	[3], [2] (задача)	Пряма	Синтетичний
23	З будь-якої точки кола його діаметр, що не виходить з цієї точки, видно під прямим кутом	[1]	Пряма	Аналітичний
<b>8 клас</b>				
1	Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і в точці перетину діляться пополам, то цей чотирикутник – паралелограм	[1], [3]	Пряма	Синтетичний
2	Сума кутів чотирикутника дорівнює $360^\circ$	[1], [2]	Пряма	Аналітичний
3	Сума зовнішніх кутів опуклого чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює $360^\circ$	[1]	Пряма	Аналітичний
4	Діагоналі паралелограма перетинаються і в точці перетину діляться пополам	[3]	Обернена	Синтетичний
5	У паралелограма протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний

№	Теорема	Підручник	Тип теореми	Спосіб доведення
6	Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то такий чотирикутник – паралелограм	[1], [2]	Пряма	Синтетичний
7	Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і паралельні, то такий чотирикутник – паралелограм	[1], [2]	Пряма	Синтетичний
8	Діагоналі прямокутника рівні	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний
9	Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом. Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний
10	Теорема Фалеса: Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний
11	Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох даних сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині	[1], [2], [3]	Пряма	Аналітичний
12	Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний
13	Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює $180^\circ$	[1], [2]	Пряма	Аналітичний
14	Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює $180^\circ$ , то навколо такого чотирикутника можна описати коло	[1], [2]	Обернена	Аналітичний
15	Суми протилежних сторін описаного чотирикутника рівні	[1], [2]	Пряма	Аналітичний
16	Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло	[1], [2]	Обернена	Аналітичний
17	У прямокутному трикутнику: 1) висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу; 2) катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу	[2]	Пряма	Аналітичний
18	Узагальнена теорема Фалеса: Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від сторін кута пропорційні відрізки	[1], [2], [3]	Пряма	Синтетичний
19	Косинус кута залежить тільки від градусної міри кута і не залежить від розміщення і розмірів трикутника	[3]	Пряма	Аналітичний
20	У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів	[2], [3]	Пряма	Аналітичний
21	Які б не були три точки, відстань між будь-якими двома з цих точок не більша від суми відстаней від них до третьої точки	[3]	Пряма	
22	Для будь-якого гострого кута $\alpha$ $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ , $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	[3]	Пряма	Аналітичний

№	Теорема	Підручник	Тип теореми	Спосіб доведення
23	При зростанні гострого кута $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$ зростають, а $\cos \alpha$ спадає	[3]	Пряма	Аналітичний
24	Точки, що лежать на прямій, під час руху (переміщення) переходять у точки, які лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення	[3] [2] (9 клас)	Пряма	Аналітичний
25	Перетворення симетрії відносно точки є рухом (переміщенням)	[3] [2] (9 клас)	Пряма	Синтетичний
26	Перетворення симетрії відносно прямої є рух (переміщення)	[3] [2] (9 клас)	Пряма	Аналітичний
27	Поворот є переміщенням	[2] (9 клас)	Пряма	Аналітичний
28	Паралельне перенесення є переміщенням	[2] (9 клас)	Пряма	Аналітичний
29	Які б не були дві точки $A$ і $A'$ , існує одне і до того ж тільки єдине паралельне перенесення, при якому точка $A$ переходить у точку $A'$	[3]	Пряма	Аналітичний
30	Які б не були точки $A, B, C$ справджується векторна рівність: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$	[3]	Пряма	Векторний
31	Абсолютна величина вектора $\lambda \vec{a}$ дорівнює $ \lambda  \cdot  \vec{a} $ . Напрямок вектора $\lambda \vec{a}$ , якщо $\vec{a} \neq 0$ , збігається з напрямком вектора $\vec{a}$ , якщо $\lambda > 0$ , і протилежний напрямку вектора $\vec{a}$ , якщо $\lambda < 0$	[3]	Пряма	Векторний
32	Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними	[3]	Пряма	Векторний
<b>9 клас</b>				
1	Гомотетія є перетворенням подібності	[3]	Пряма	Векторний
2	При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення	[2]	Пряма	Аналітичний
3	Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності	[2]	Пряма	Аналітичний
4	Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутника подібні	[3] [2], [1] (8 клас)	Пряма	Аналітичний
5	Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то трикутники подібні	[3], [2], [1] (8 клас)	Пряма	Аналітичний
6	Якщо сторони одного трикутника пропорційні сторонам другого, то такі трикутники подібні	[3], [2], [1] (8 клас)	Пряма	Аналітичний
7	Кут, вписаний у коло, дорівнює половині відповідного центрального кута	[3], [2], [1] (8 клас)	Пряма	Синтетичний
8	Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними	[3]	Пряма	Векторний
		[2]		Аналітичний

№	Теорема	Підручник	Тип теореми	Спосіб доведення
9	Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів	[2], [3]	Пряма	Аналітичний
10	Довжина ламаної не менша за довжину відрізка, що сполучає її кінці	[3]	Пряма	Аналітичний
11	Сума кутів опуклого $n$ -кутника дорівнює $180^\circ(n-2)$	[3] [2] (8 клас)	Пряма	Аналітичний
12	Правильний опуклий багатокутник є вписаним у коло і описаним навколо кола	[3]	Пряма	Синтетичний
	Якщо багатокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло	[2]		
13	Правильні опуклі $n$ -кутники подібні. Зокрема, якщо у них сторони однакові, то вони рівні	[3]	Пряма	Аналітичний
14	Відношення довжини кола до його діаметра не залежить від кола, тобто одне й те саме для будь-яких двох кіл	[3]	Пряма	Від супротивного
15	Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат	[2]	Пряма	Аналітичний
16	Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців	[2]	Пряма	Аналітичний
17	Коло з центром $C(x_0; y_0)$ і радіусом $R$ задається рівнянням: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	[2]	Пряма	Аналітичний

Розрізняють пряму, обернену, протилежну і обернену до протилежної теореми, проте у курсі шкільної планіметрії пропонуються не всі типи теорем, а тільки прямих (93%) і обернені (7%), прямих теорем набагато більше (діаграма 1):

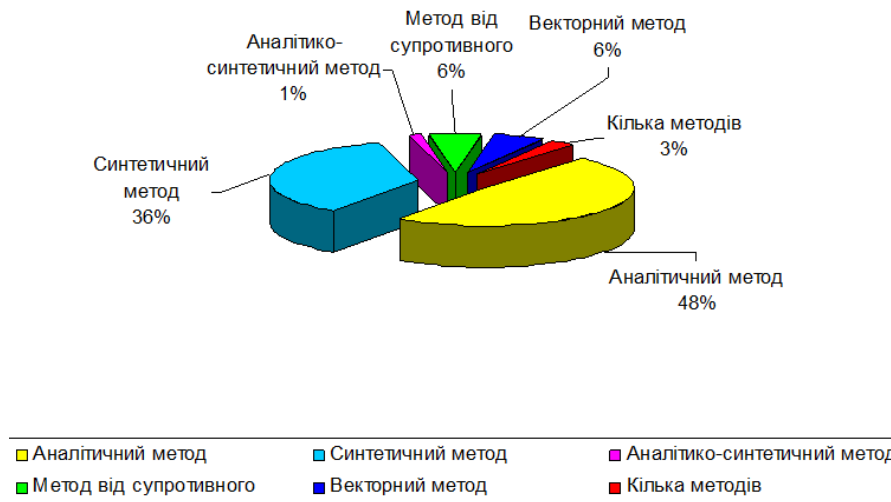


**Діаграма 1**

У шкільному курсі математики учні ознайомлюються з такими основними методами доведень: синтетичним, аналітичним, аналітико-синтетичним (його інколи називають методом руху з двох кінців), методом доведення від супротивного, повної індукції, математичної індукції, методами геометричних перетворень (центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, паралельне перенесення, гомотетія та подібність), алгебраїчним методом, окремими випадками якого є векторний і координатний.

У розглянутих підручників за способом доведення теореми розподілилися наступним чином (діаграма 2):

- аналітичний метод (48%);
- синтетичний метод (36%);
- аналітико-синтетичний (1%);
- метод від супротивного (6%);
- векторний метод (6%);
- доведення кількома методами (3%).



**Діаграма 2**

У розглянутих підручниках даний розподіл має наступний вигляд:

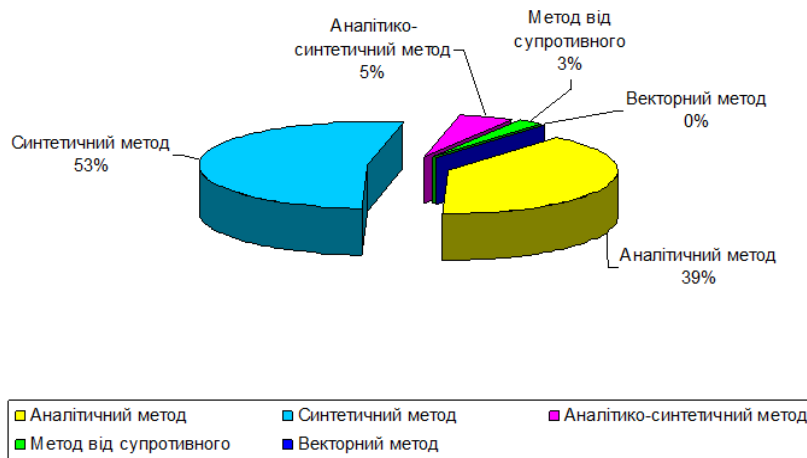
1. Підручник авторів Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владимірова Н.Г.

За типом теорем: прямих (90%), обернених (10%) (діаграма 3):



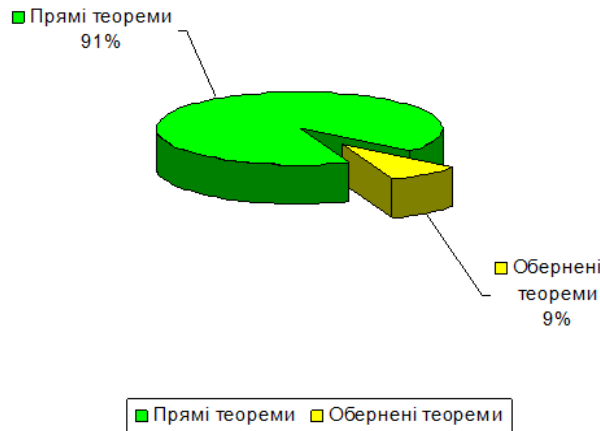
**Діаграма 3**

За способом доведення: аналітичний метод (39%), синтетичний метод (53%), аналітико-синтетичний (5%), метод від супротивного (3%), векторний метод (0%) (діаграма 4):



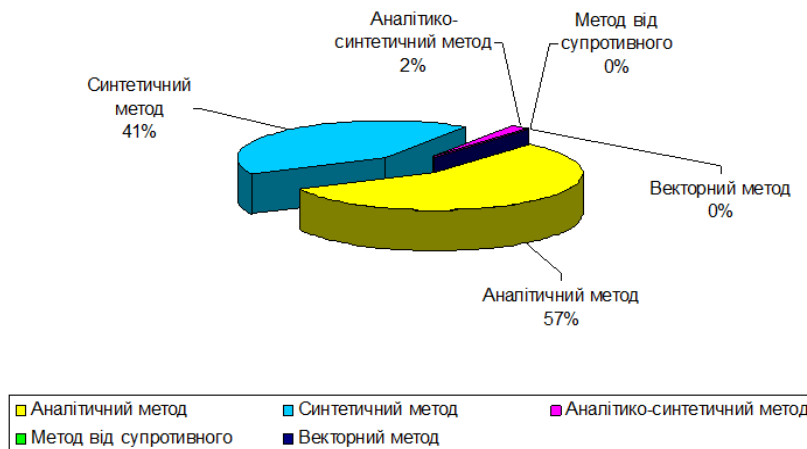
**Діаграма 4**

2. Підручник авторів Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.  
 За типом теорем: прямих (91%), обернених (9%) (діаграма5):



**Діаграма 5**

За способом доведення: аналітичний метод (57%), синтетичний метод (41%), аналітико-синтетичний (2%), метод від супротивного (0%), векторний метод (0%) (діаграма 6):



**Діаграма 6**



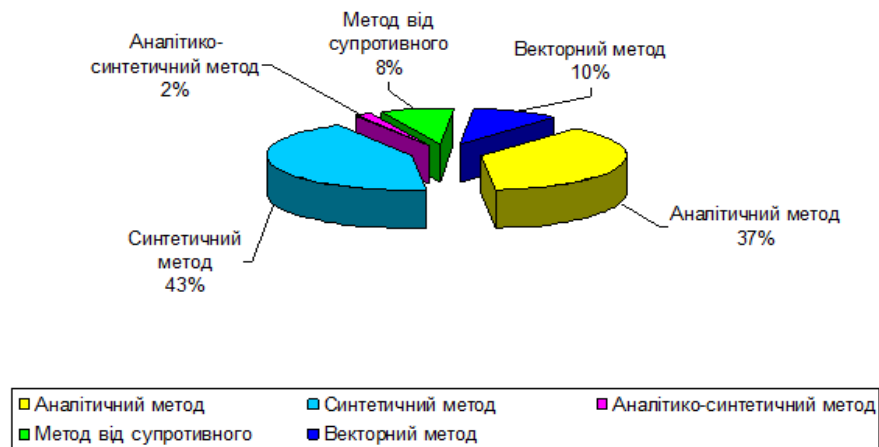
3. Підручник автора Погорелов О.В.

За типом теорем: прямих (94%), обернених (6%) (діаграма 7):



**Діаграма 7**

За способом доведення: аналітичний метод (37%), синтетичний метод (43%), аналітико-синтетичний (2%), метод від супротивного (8%), векторний метод (10%) (діаграма 8):



**Діаграма 8**

На основі даної таблиці та проведених нами досліджень, можна зробити висновки.

1. У сучасному курсі шкільної планіметрії пропонується 72 теореми, серед яких 23 у 7 класі, 32 у 8 класі, 17 у 9 класі.

2. У курсі планіметрії пропонуються лише прямі і обернені теореми, причому у відношенні 9:1 для усіх аналізованих підручників.

3. Серед способів доведення найбільш повними є підручники авторів Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владимірова Н.Г. [1] та автора Погорелов О.П. [3], в яких використовуються аналітичний метод, синтетичний метод, аналітико-синтетичний метод, метод від супротивного та векторний метод. «Найбіднішим» на способи доведення і підручник авторів Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. [2], який пропонує лише аналітичний, синтетичний та аналітико-синтетичний методи доведення.

4. Курс геометрії середньої школи передбачає достатню кількість теорем та їх доведень. Їх розуміння та подальше використання можуть бути складними для пересічного учня. Тому вчителю необхідно всіляко зацікавлювати учнів та робити

навчання більш наочним і мотивованим, що можна досягти у тому числі і за допомогою використання інформаційних технологій.

#### Список використаної літератури

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владимірова Н.Г., Геометрія: Підручник для 7-9 класів / Г.П. Бевз., В.Г. Бевз., Н.Г. Владимірова.. – К.: «Вежа», 2008. – 243 с.
2. Бурда М.І., Геометрія: Підручник для 7-9 класів / М.І. Бурда., Н.А. Тарасенкова.. – К.: «Зодіак-ЕКО», 2008. – 250 с.
3. Погорелов О.В., Геометрія: Підручник для 7-11 класів. – 2-ге вид. / О.В. Погорелов. – К.: Освіта, 1992. – 352 с.
4. Тесленко И.Ф. О преподавании геометрии в средней школе / И.Ф. Тесленко. – М.: Просвещение, 1985.

#### **Анотація. Шамрай С. Теорема шкільного курсу планіметрії: аналіз типів та способів доведень.**

*У статті розглянуто питання, пов'язані з теоремами шкільного курсу планіметрії. Наведено їх формулювання, спосіб формулювання, спосіб доведення. Подано діаграми вмісту різних типів теорем у трьох діючих підручниках. Зроблено висновок на користь підручників [1] і [3], які містять усілякі типи формулювань та типи доведень, що є істотним у підготовці школярів з планіметрії.*

*Ключові слова: теорема, тип формулювання, тип доведення, діючі підручники з планіметрії.*

#### **Аннотация. Шамрай С. Теоремы школьного курса планиметрии: анализ типов и способов доказательства.**

*В статье рассмотрены вопросы, связанные с теоремами школьного курса планиметрии. Приведены их формулировки, способ формулирования, способ доказательства. Поданы диаграммы содержания различных типов теорем в трех действующих учебниках. Сделан вывод в пользу учебников [1] и [3], которые содержат всевозможные типы формулировок и типы доказательств, что является существенным в подготовке школьников по планиметрии.*

*Ключевые слова: теорема, тип формулировки, тип доказательства, действующие учебники планиметрии.*

#### **Abstract. Shamray S. Theorem school course in plane geometry: analysis of the types and methods of proof.**

*The article discusses issues related to the school course of plane geometry theorems. Given their formulation, formulation method, the method of proof. Posted diagram content of different types of theorems in three existing textbooks. Concluded in favor of the textbook [1] and [3], which contain various types of formulations and types of evidence that is essential to prepare students for geometry.*

*Keywords: theorem, type of formulation, the type of evidence existing textbooks geometry.*