Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Купцов М.І., Яблочніков С.Л. Аспекти застосування методу перетворюючої матриці // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2016. – Випуск 1(7). – С. 87-95.

Kuptsov M.I., Yablochnikov S.L. Aspects of the method transforming matrix // Physics and Mathematics Education : scientific journal. – 2016. – Issue 1 (7). – P. 87-95.

УДК 517.9

М.І. Купцов
Академія права та управління ФСВП, Росія
С.Л. Яблочніков
Вінницький соціально-економічний інститут, Україна

АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПЕРЕТВОРЮЮЧОЇ МАТРИЦІ

Актуальність теми дослідження. Математичне моделювання, що передбачає, зокрема, формування систем диференціальних рівнянь, є досить важливим етапом вирішення багатьох природничо-наукових та інженерних завдань. Тому, дослідженню диференціальних рівнянь, котрі відображають механізми різноманітних фізичних, технічних, технологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ, й, зокрема, пошуку інтегральних різноманіть , присвячена велика кількість наукових публікацій та дисертаційних досліджень українських, російських та закордонних вчених. Однак, різноманіття окремих систем диференціальних рівнянь обумовлює наявність проблем стосовно розробки загальних ефективних методів дослідження інтегральних многовидів (особливо у критичних випадках), що, в свою чергу, й визначає актуальність дослідження, яке реалізоване авторами.

Аналіз публікацій за темою дослідження. До найбільш продуктивних методів здійснення дослідження інтегральних різноманіть слід віднести методи малого параметру [1], точкових відображень [2], усереднення [3], а також метод так званих інтегральних многовидів, запропонований у свій час М.М. Боголюбовим [4] й згодом розвинутий у наукових працях Ю.А. Мітропольського і А.М. Самойленко [5–7]. Зокрема, зазначений нами вище метод інтегральних різноманіть дозволив успішно вирішити задачу знаходження інваріантних множин стосовно досить широкого класу систем звичайних диференціальних рівнянь, котрі цілком можуть бути зведені до системи рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x} = \overline{X}(\varepsilon, x, \varphi, t), \\ \dot{\varphi} = \Phi(\varepsilon, x, \varphi, t), \end{cases} \tag{1}$$

де $x \in R^n, \varphi \in R^m, \overline{X}(0,0,\varphi,t) \equiv 0,$ при цьому $\overline{X}(\varepsilon,0,\varphi,t)$ тотожно у нуль не перетворюється.

Термін («многовиди») в публікаціях українських дослідників, на нашу думку, з`явився в наслідок здійснення «прямого» й не зовсім коректного перекладу терміну «многообразие», котрий є уживаним у науковій літературі, що надрукована російською мовою. В українській мові відсутнє слово «много», замість нього зазвичай уживають слова «багато», «множина», «розмаїття». Тому, ми пропонуємо ввести новий варіант україномовного трактування даного поняття – «різноманіття». Далі за текстом будемо застосовувати обидва терміни паралельно.

Як правило (див., наприклад, [4 – 6]), метод інтегральних різноманіть (російською – «метод интегральных многообразий») застосовується щодо вирішення системи (1) ще й при додатковому припущенні стосовно експоненційної дихотомії лінійної підсистеми

$$\dot{x} = A(t) \cdot x. \tag{2}$$

У випадку неавтономності матриці лінійного наближення це означає відсутність у неї нульових та суто уявних власних чисел.

Метод інтегральних різноманіть цілком може бути розповсюджений й на випадок, коли $\overline{X}(\varepsilon,0,0,t) \equiv 0$ [8, 9] або ж на певні спеціальні системи [10], котрі задовольняють вимогам експоненційної дихотомії рівняння (2). Однак, цілком уникнути виконання умов $\overline{X}(\varepsilon,0,\varphi,t) \equiv 0$ та одночасної відсутності експоненційної дихотомії вдається лише за допомогою знаходження рішення допоміжного векторного (біфуркаційного) рівняння [11, 12].

У прикладних дослідженнях інваріантна поверхня, котра має значно меншу розмірність, дозволяє певним чином спростити моделі, що розглядаються, а також дослідити їх характерні властивості, а також набути додаткової інформації стосовно стану досліджуваних систем. Саме тому метод інтегральних многовидів є потужним інструментом не тільки здійснення аналізу нелінійних коливань [6, 11, 13] та задач динаміки [14 – 16] (в тому числі й тих, в яких з`ясовуються властивості траєкторій руху космічних апаратів [17, 18]), але й вирішення проблем в межах теорії управління [19 – 21], механіки рідини [22], електродинаміки [23] та процесів самоорганізації наноструктур [24, 25].

Мета даної публікації – розв`язок задачі існування ненульових інтегральних многовидів в околі стану рівноваги (*x*=0) системи (1) при умовах $\overline{X}(\varepsilon,0,\varphi,t) \equiv 0$, незмінності матриці $A(t)$ рівняння (2) та наявності у неї власних чисел з нульовою дійсною частиною.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь (1) з урахуванням наступних умов:

1) $\overline{X}(\varepsilon,x,\varphi,t) \equiv X(\varepsilon,x,\varphi,t) \cdot x,$ де $X(\varepsilon,x,\varphi,t)$– $n \times n$–матриця;

2) праві частини системи, *ω*–періодичні стосовно компонентів вектора *φ* та *T*–періодичні стосовно незалежної змінної $t \in R$, неперервні в області $R^{m+1} \times \mathrm{X} \times \mathrm{E}$ й забезпечують існування єдиного і нелокального продовження розв`язків, де $\mathrm{X} = \{x : \|x\| \le \delta_1\}, \mathrm{E} = \{\varepsilon : \|\varepsilon - \hat{\varepsilon}\| \le \delta_2\},$ $\|\cdot\|$ – евклідова норма, δ_i– константи, $\varepsilon \in R^{n+m}, \hat{\varepsilon}$ – сталий вектор;

3) лінійна підсистема

$$\dot{x} = X(0,0,\varphi,t) \cdot x \tag{3}$$

не залежить від *t*, *φ* та має ненульові *kT*–періодичні рішення, $k \in N$.

Формулюється задача знаходження достатніх умов існування ненульових інтегральних різноманіть в околі стану рівноваги (x=0) системи (1) при попередніх умовах 1) – 3).

Нехай $F(\varphi,t)\in\Omega_1, \varepsilon(\varphi)\in\Omega_2$ – ω–періодичні стосовно компонентів вектора φ обмежені вектор-функції, котрі задовольняють умовам Ліпшиця, які мають, відповідно, розмірність n та l ($0<l\le n+m$, $F(\varphi,t)$ kT–періодична по t).

Припустимо для p–мірної вектор-функції $\|y(\tau)\| = \left[\sum\limits_{i=1}^{p}\sup\limits_{\omega}|y_i(\tau)|\right]^{1/2}$. Якщо для множин Ω_i ввести вказану норму, то вони стають опуклими компактами [26, с. 15].

Для вирішення диференційного рівняння

$$\dot{\varphi} = \Phi(\varepsilon(\varphi_0), F(\varphi_0,t), \varphi, t), \tag{4}$$

котре задовольняє початковим даним $\varphi(0)=\varphi_0$, застосуємо позначення φ_t^F. Нехай, окрім того, $Y_\varepsilon^F(\varphi_0,t)$ – матрицант рівняння

$$\dot{x} = X\left(\varepsilon(\varphi_0), F(\varphi_0,t), \varphi_t^F, t\right)\cdot x \ . \tag{5}$$

Тут і далі $n+m-l$ значень компонентів вектора ε зафіксовано, а замість l значень в рівнянні системи (1) підставлено елементи функції $\varepsilon(\varphi_0)\in\Omega_2$, а $F(\varphi_0,t)\in\Omega_1$.

Визначення. Невідокремлену функціональну $n\times n$–матрицю $Q_\varepsilon^F(\varphi_0)$ зі сталим визначником, неперервну за усіма її змінними та ω–періодичну за компонентами вектора φ_0, надалі будемо іменувати перетворюючою матрицею системи (5) при виконанні умови, що у такої матриці

$$\left(Y_\varepsilon^F(\varphi_0,kT) - I_n\right)\cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0) \tag{6}$$

існує, принаймні, один ненульовий стовпчик $q_\varepsilon^F(\varphi_0)$. Тут I_n – одинична $n\times n$–матриця.

Далі розглянемо наступну систему рівнянь (7)

$$\begin{cases} q_\varepsilon^F(\varphi_0)=0, \\ \int\limits_0^{kT}\Phi\left(\varepsilon(\varphi_0), F(\varphi_0,t), \varphi_t^F, t\right)dt = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Теорема. Нехай є виконаними умови 1) – 3). Тоді, якщо перетворюючу матрицю системи (5) вдається побудувати так, що

4) для вирішення системи (7) достатньо знайти рішення певної, відмінної від (7) системи рівнянь

$$S_\varepsilon^F(\varphi_0)=0 \ ; \tag{8}$$

5) для кожної функції $F(\varphi_0,t)\in\Omega_1$ рівняння (8) має лише одне рішення $\varepsilon^F(\varphi_0)$ з множини Ω_2;

6) $\left\|Y_\varepsilon^F(\varphi_0,t)\cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0)\right\|\le r_0$,

$$\left\|Y_\varepsilon^F(\varphi_0^*,t)\cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0^*) - Y_\varepsilon^F(\varphi_0,t)\cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0)\right\|\le r_1\left\|\varphi_0^*-\varphi_0\right\|, \text{ при } t\in[0;kT],$$

то для будь-якого вектора $\varphi_0\in R^m$ можливо вказати таке значення параметру ε, що система (1) буде мати ненульове інтегральне різноманіття як завгодно малої околиці стану рівноваги x=0.

Доказ. З умов 4), 5) теореми слідує, що при $\varepsilon=\varepsilon^F(\varphi_0)$ система (7) перетворюється у тотожність. Це, в свою чергу, означає, що рівняння (5) має kT–періодичне рішення

$$x^F(\varphi_0,t) = Y_\varepsilon^F(\varphi_0,t)\cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0)\cdot C, \tag{9}$$

де усі елементи постійного n–вектора C дорівнюють нулю, окрім елементу, який відповідає номеру стовпчика $q_\varepsilon^F(\varphi_0)$, котрий дорівнює c – довільній константі. В свою чергу, неособливість перетворюючої матриці забезпечує нетривіальність $x^F(\varphi_0, t)$.

Згідно умов 6), $x^F(\varphi_0, t)$ задовольняє умовам Ліпшиця зі сталою $r_1 \cdot c$ за змінною φ_0 та обмежена числом $r_0 \cdot c$. Тому, за рахунок зменшення c завжди можливо досягти виконання $x^F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$.

Таким чином, ми сформували оператор, котрий визначається рівняннями (8) та (9), до якого, у зв`язку із єдністю значення $\varepsilon^F(\varphi_0)$ для кожної функції $F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$, можливо застосувати теорему [27, С. 26]. Тому, у цього оператора існує нерухома точка $\Psi(\varphi_0, t) = Y_\varepsilon^\Psi(\varphi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^\Psi(\varphi_0) \cdot C$, при $\varepsilon = \varepsilon^\Psi(\varphi_0)$, що визначає ненульове інтегральне різноманіття системи (1).

Дійсно, для того, щоб упевнитись в цьому, достатньо здійснити диференцювання $\Psi(\varphi_0, t)$ та врахувати той факт, що функція φ_t^Ψ задовольняє рівнянню (4), а тому, й системі (1).

Теорема доведена.

В якості ілюстрації практичного застосування наведеної нами вище теореми розглянемо наступний приклад.

Приклад. Нехай до системи трьох скалярних диференціальних рівнянь (10)

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \alpha_2(\varepsilon)\cdot \rho_1 + (\alpha_1(\varepsilon) - 1)\cdot \rho_2 + \\ \quad + (2 + \sin t)\cdot \rho_1^2 + \rho_2^2 \cdot \cos\varphi, \\ \\ \dot{\rho}_2 = (1 - \alpha_1(\varepsilon))\cdot \rho_1 + \alpha_2(\varepsilon)\cdot \rho_2 + \\ \quad + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos\varphi, \\ \\ \dot{\varphi} = \alpha_3(\varepsilon) + \\ \quad + (\rho_1 + \rho_2)^2 \cdot \cos t \cdot (2 + \sin\varphi), \end{cases} \tag{10}$$

входить лише одна векторна величина $\varepsilon \in R^3$ і $\alpha_i(\varepsilon) = \alpha_{i1}\cdot\varepsilon_1 + \alpha_{i2}\cdot\varepsilon_2 + \alpha_{i3}\cdot\varepsilon_3 + o_i(\|\varepsilon\|)$, а незмінна 3×3–матриця $\mathrm{A} = (\alpha_{ij})$ неособлива. Будемо також вважати, що для тотожностей $o_i(\|\varepsilon\|)$ виконуються умови Ліпшиця з такими константами γ_i, для яких $\gamma_i \to 0$ при $\delta_2 \to 0$ (див. 2)).

Тоді для системи (10) є справедливими твердження 1) – 3). Дійсно, система (3) в даному випадку набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = -\rho_2, \\ \dot{\rho}_2 = \rho_1, \end{cases}$$

та, відповідно, має 2π–періодичне рішення $\rho_1 = \cos t, \rho_2 = \sin t$. Виконання умов 1) і 2) очевидно.

Системи, подібні рівнянням (10), досліджувались у публікаціях [5, с. 479] и [26, с. 71]. Однак, системі (10) притаманна низка особливостей, котрі не дозволяють довести існування у неї ненульового інтегрального різноманіття тими самими методами, котрі застосовуються для зазначених у [5] та [26] систем. Продемонструємо, що сформульована нами вище теорема дозволяє це зробити.

З цією метою зазначимо, що рівняння (4) та (5) для системи (10) будуть відповідно мати вигляд (11) та (12)

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \alpha_3(\varepsilon(\varphi_0)) + \\ + (F_1(\varphi_0,t) + F_2(\varphi_0,t))^2 \cdot \cos t \cdot (2 + \sin\varphi), \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = (\alpha_2(\varepsilon(\varphi_0)) + (2+\sin t)\cdot F_1(\varphi_0,t))\cdot \rho_1 + \\ + \left(\alpha_1(\varepsilon(\varphi_0)) - 1 + F_2(\varphi_0,t)\cdot \cos\varphi_t^F\right)\cdot \rho_2, \\ \\ \dot{\rho}_2 = (1 - \alpha_1(\varepsilon(\varphi_0)) + F_1(\varphi_0,t))\cdot \rho_1 + \\ \left(\alpha_2(\varepsilon(\varphi_0)) + F_2(\varphi_0,t) + F_1(\varphi_0,t)\cdot\cos\varphi_t^F\right)\cdot \rho_2, \end{cases} \tag{12}$$

при цьому $F(\varphi_0,t) = (F_1(\varphi_0,t), F_2(\varphi_0,t))^T$, $\varepsilon(\varphi_0) = (\varepsilon_1(\varphi_0), \varepsilon_2(\varphi_0), \varepsilon_3(\varphi_0))^T$ – *2π*–періодична за φ_0, а $F(\varphi_0,t)$ ще й за t.

Крім того, в силу властивостей правих частин системи (10), розв`язок за φ_t^F рівняння (11) обмежно, задовольняє умові Ліпшиця за усіма своїми змінними при $t\in[0,2\pi]$ та *2π*–періодичне за початковими даними φ_0. А тоді й матриціанту $Y_\varepsilon^F(\varphi_0,t)$ рівняння (12) притаманні такі ж самі властивості (див., на приклад, [26, с. 29]).

Можна довести (див., на приклад, [26, с. 34]), що для матриціанта рівняння (12) справедливо представлення

$$Y_\varepsilon^F(\varphi_0,t) = \overline{Y}_\varepsilon^F(\varphi_0,t) + \widetilde{Y}_\varepsilon^F(\varphi_0,t),$$

в якому $\overline{Y}_\varepsilon^F(\varphi_0,t)$ є матриціантом системи двох скалярних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \alpha_2(\varepsilon(\varphi_0))\cdot\rho_1 + (\alpha_1(\varepsilon(\varphi_0)) - 1)\cdot\rho_2, \\ \dot{\rho}_2 = (1 - \alpha_1(\varepsilon(\varphi_0)))\cdot\rho_1 + \alpha_2(\varepsilon(\varphi_0))\cdot\rho_2, \end{cases}$$

а $\widetilde{Y}_\varepsilon^F(\varphi_0,t)$ обмежено, задовольняє умовам Ліпшиця за усіма змінними при $t\in[0,2\pi]$ з сталими, які можна перетворити на досить малі за рахунок зменшення числа δ_1 з умови 2).

Тому,

$$\overline{Y}_\varepsilon^F(\varphi_0,t) = e^{\alpha_2(\varepsilon(\varphi_0))t}\cdot\begin{pmatrix} y_1(\varphi_0,t) & y_2(\varphi_0,t) \\ -y_2(\varphi_0,t) & y_1(\varphi_0,t)\end{pmatrix},$$

де $y_1(\varphi_0,t) = \cos[(1-\alpha_1(\varepsilon(\varphi_0)))\cdot t]$,
$y_2(\varphi_0,t) = \sin[(1-\alpha_1(\varepsilon(\varphi_0)))\cdot t]$.

І тоді $y_1(\varphi_0,2\pi) = \cos(\alpha_1(\varepsilon(\varphi_0))\cdot 2\pi)$,
$y_2(\varphi_0,t) = -\sin(\alpha_1(\varepsilon(\varphi_0))\cdot 2\pi)$.

З представлення у вигляді ряду Тейлора для $e^{\alpha_2(\varepsilon(\varphi_0))2\pi}$, $\cos(\alpha_1(\varepsilon(\varphi_0))\cdot 2\pi)$, $\sin(\alpha_1(\varepsilon(\varphi_0))\cdot 2\pi)$, отримуємо, що другий стовпчик матриці $\left(Y_\varepsilon^F(\varphi_0,2\pi) - I_2\right)$ можливо записати таким чином:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\cdot\varepsilon_1 + \alpha_{12}\cdot\varepsilon_2 + \alpha_{13}\cdot\varepsilon_3 + \tilde{y}_1^F(\varepsilon(\varphi_0),\varphi_0) \\ \alpha_{21}\cdot\varepsilon_1 + \alpha_{22}\cdot\varepsilon_2 + \alpha_{23}\cdot\varepsilon_3 + \tilde{y}_2^F(\varepsilon(\varphi_0),\varphi_0)\end{pmatrix}, \tag{13}$$

де у $\tilde{y}_i^F(\varepsilon(\varphi_0),\varphi_0)$ зібрані елементи другого стовпчика матриці $\widetilde{Y}_\varepsilon^F(\varphi_0,2\pi)$ та доданки, котрі мають по *ε* порядок малості більший, ніж перший.

Якщо тепер прийняти $Q_\varepsilon^F(\varphi_0) \equiv I_2$, то з цього випливає, що виконується умова 6) попередньої теореми та другий стовпчик $q_\varepsilon^F(\varphi_0)$ матриці (6) є вектором (13). Тому, у прикладі, що розглядається, для системи (7) (а разом і з нею й для рівняння (8)) можливо представлення

$$\mathrm{A}\cdot\varepsilon(\varphi_0) + \tilde{y}_\varepsilon^F(\varphi_0) = 0, \tag{14}$$

в якому $\tilde{y}_{\varepsilon}^{F}(\varphi_0)=\begin{pmatrix}\tilde{y}_1^F(\varepsilon(\varphi_0),\varphi_0)\\ \tilde{y}_2^F(\varepsilon(\varphi_0),\varphi_0)\\ \tilde{y}_3^F(\varepsilon(\varphi_0),\varphi_0)\end{pmatrix}$, $\tilde{y}_3^F(\varepsilon(\varphi_0),\varphi_0)=o_3(\|\varepsilon(\varphi_0)\|)\cdot 2\pi+$

$+\int_0^{2\pi}\left[(F_1(\varphi_0,t)+F_2(\varphi_0,t))^2\cdot\cos t\cdot(2+\sin\varphi_t^F)\right]dt$.

Оскільки $\det \mathrm{A}\neq 0$, то (14) цілком розв`язується відносно $\varepsilon(\varphi_0)$:

$$\varepsilon(\varphi_0)=-\mathrm{A}^{-1}\cdot\tilde{y}_{\varepsilon}^{F}(\varphi_0). \tag{15}$$

Шляхом зменшення чисел δ_1 та δ_2 легко впевнитись, що оператор, котрий задає рівняння (15), є стискаючим й для кожної функції $F(\varphi_0,t)\in\Omega_1$ переводить простір Ω_2 у Ω_2. Цим фактом у повній мірі доведено виконання умов 4) та 5) попередньої теореми, тому, існування локального ненульового інтегрального різноманіття (многовиду) системи (10).

Розглянутий нами приклад не тільки ілюструє метод перетворюючої матриці, котра сформульована нами у наведеній вище теоремі, але й наочно демонструє те, що є сенс його використовувати у випадках, коли класичний метод інтегральних різноманіть (многовидів) застосувати з певних причин не має можливості. Так, система (10) має нульовий многовид $\rho_1=0,\ \rho_2=0$ при будь-яких значеннях параметру ε, а це не дозволяє скористатися методом інтегральних різноманіть . Крім того, з наведеного нами прикладу зрозуміло, що доведений нами вище принцип існування інваріантних множин систем звичайних диференціальних рівнянь є більш ефективним для аналізу широкого класу систем виду (1), ніж низка теорем, котрі були у свій час розглянуті у публікаціях [26, 28 – 30] (див., зокрема, [26, с. 71]).

Список використаних джерел

1. Гребенников Е. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
2. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Либроком, 2010. – 472 с.
3. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в исследованиях резонансных систем / Ю. А. Митропольский, Е. А. Гребенников. – М.: Наука, 1992. – 220 с.
4. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Львов: Изд-во АН УССР, 1945. – 139 с.
5. Митропольский Ю. А. Интегральные многообразия в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
6. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987. – 301 с.
7. Самойленко А. М. Про існування нескінченновимірних інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь / А. М. Самойленко, Ю. В. Теплінський, К. В. Пасюк // Нелінійні коливання, 2010. – Т. 13, – №2. – С. 253–271.
8. Соболев В.А. Интегральные многообразия и принцип сведения / В.А. Соболев, Д.М. Щепакин // Вестник Самарского государственного ун-та, 2011. – № 5 (86). – С. 81 – 92.
9. Курбаншоев С.З. Построение оптимальных интегральных многообразий для нелинейных дифференциальных уравнений / С.З. Курбаншоев, М.А. Нусайриев //

Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2014. – Т. 57. – № 11–12. – С. 807–812.
10. Щетинина Е.В. Интегральные многообразия быстро-медленных систем и затягивание потери устойчивости / Е.В. Щетинина // Вестник Самарского государственного университета, 2010. – №6 (80). – С. 93–105.
11. Бибиков Ю.Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации / Ю.Н. Бибиков. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. – 142 с.
12. Волков Д. Ю. Бифуркация инвариантных торов из состояния равновесия при наличии нулевых характеристических чисел / Д. Ю. Волков // Вестник Ленинградского университета, 1988. – Серия 1. – №2. – С. 102 – 103.
13. Кононенко Л.И. Влияние формы интегрального многообразия на возникновение релаксационных колебаний / Л.И. Кононенко // Сибирский журнал индустриальной математики, 2006. – Т. IX. – №2. – С. 75 – 80.
14. Гашененко И.Н. Бифуркации интегральных многообразий в задаче о движении тяжелого гиростата / И.Н. Гашененко // Нелинейная динамика, 2005. – Т.1. – № 1. – С. 33–52.
15. Макеев Н.Н. Интегральные многообразия уравнений динамики сложных механических систем: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. СПб: Изд-во СПбГУ, 1992. – 28 с.
16. Макеев Н.Н. Приведённая система геометрической динамики твёрдого тела / Н.Н. Макеев // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2013. – №2 (21). – С. 51 – 58.
17. Заболотнов Ю.М. Применение метода интегральных многообразий для построения резонансных кривых в задаче входа КА в атмосферу / Ю.М. Заболотнов, В.В. Любимов // Космические исследования. 2003. – Т. 41. – № 5. –С. 481–487.
18. Купцов М. И. Применение теории периодических решений к нахождению орбит спутников / М. И. Купцов // Компьютерные методы небесной механики – 95: Тез. докл. всерос. конф. с междунар. участием «Компьютерные методы небесной механики – 95». СПб: Изд-во ИТА РАН, 1995. – С. 141 – 142.
19. Соболев В.А. Метод интегральных многообразий в задачах оптимального управления сингулярно возмущенными системами / В.А. Соболев, М.С. Осинцев // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 769 – 779.
20. Гурман В.И. Преобразования управляемых систем для исследования импульсных режимов / В.И. Гурман // Автоматика и телемеханика, 2009. – №4. – С. 89 – 97.
21. Мухарлямов Р.Г. Управление динамикой манипулятора с программными связями / Р.Г. Мухарлямов, Н.В. Абрамов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы, 2011. – №43. – С. 90 – 102.
22. Остапенко В.В. О разрывных решениях уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере / В.В. Остапенко, А.А. Черевко, А.П. Чупахин // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа, 2011. – №2. – С. 33 – 51.
23. Дякин В.В. Об одном подходе к решению магнитостатической задачи для тел с инородными включениями в неоднородном внешнем поле / В.В. Дякин, В.Я. Раевский, О.В. Умергалина // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2009. – Т.49. – №1. – С. 178 – 188.
24. Метлицкая А. В. Моделирование процессов самоорганизации наноструктур при ионном распылении поверхности полупроводников: автореферат диссертации на

соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ярославль: ЯГУ, 2014. – 30 с.
25. Куликов А.Н. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке / А.Н. Куликов, Д.А. Куликов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012. – Т. 52. – №5. – С. 930.
26. Купцов М. И. Существование интегральных многообразий и периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Рязань: РГПУ, 1996. – 133 с.
27. Терёхин М. Т. Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений / М. Т. Терёхин // Учеб. пособие к спецкурсу. – Рязань: РГПИ, 1992. – 88 с.
28. Купцов М. И. Существование интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений / М. И. Купцов // Дифференциальные уравнения, 1998. – Т.34. – №6.– С. 855.
29. Kuptsov M.I. Local integral manifold of a system of differential equations // Differential equations. 1998. vol. 34, no. 7, pp. 1005–1007.
30. Купцов М. И. Локальное интегральное многообразие систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметра / М. И. Купцов // Дифференциальные уравнения, 1999. – Т.35. – №11. – С. 1579 – 1580.

Анотація. Купцов М.І., Яблочніков С.Л. Аспекти застосування методу перетворюючої матриці.

В статті розглядається вирішення задачі стосовно пошуку нетривіальних інтегральних многовидів нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь, що має кінцеву розмірність, права частина якої є періодичною вектор-функцією незалежної змінної та містить параметри. Передбачається, що у дослідженій системі в наявності нульова інтегральний многовид при усіх значеннях параметру, а відповідна лінійна підсистема має m-параметричну множину періодичних розв`язків. Знайдені нові достатні умови існування в околі стану рівноваги системи ненульового інтегрального різноманіття меншого ступеня розмірності ніж того, що має вихідний фазовий простір. Під час знаходження достатніх умов формуються оператори, котрі дозволяють звести розв`язок даної задачі до пошуку їх нерухомих точок.

Ключові слова: *метод інтегральних многовидів, метод перетворюючої матриці, система звичайних інтегральних рівнянь, операторне рівняння, зменшення розмірності фазового простору.*

Аннотация. Купцов М.И., Яблочников С.Л. Аспекты использования метода преобразующей матрицы.

Рассматривается задача нахождения нетривиальных интегральных многообразий нелинейной конечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которой является периодической вектор-функцией по независимой переменной и содержит параметры. Предполагается, что у изучаемой системы имеется нулевое интегральное многообразие при всех значениях параметра, а соответствующая линейная подсистема имеет m-параметрическое семейство периодических решений. Найдены *новые достаточные условия существования в окрестности состояния равновесия системы ненулевого периодического интегрального многообразия меньшего числа измерений, чем исходное фазовое пространство. При выводе достаточных условий строятся операторы, позволяющие свести решение указанной задачи к поиску их неподвижных точек.*

Ключевые слова: *метод интегральных многообразий, метод преобразующей матрицы, система обыкновенных дифференциальных уравнений, операторное уравнение, уменьшение размерности фазового пространства.*

Abstract. Kuptsov M.I., Yablochnikov S.L. Aspects of the method transforming matrix.

We consider the problem of finding nontrivial integral manifolds for nonlinear nite-dimensional system of ordinary differential equations, the right side is a periodic vector-function on the independent variable and contains the parameters. It is assumed that the system under study has zero integral manifold for all values of the parameter, and the corresponding linear subsystem has the m-parametric family of periodic solutions. Found new sufficient conditions of existence in a neighborhood of the equilibrium systems of non-zero periodic integral manifolds of fewer dimensions than the original phase space. In the derivation of sufficient conditions are based operators, which allow to bring a solution to this problem to the search of fixed points.

Key words: *method of integral manifolds, the method of transforming the matrix system of ordinary differential equations, operator equation, the reduction of dimensionality of the phase space.*