Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Трунова О.В. Застосування апарату теорії неперервних Марківських ланцюгів при визначенні зміни станів виробничих систем // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2016. – Випуск 1(7). – С. 167-176.

Trunova H. Application of the theory of continuous Markov chains in determining changes in the status of production systems // Physics and Mathematics Education. Scientific journal. – 2016. – Issue 1 (7). – Р. 167-176.

УДК 378.016:519.21

О.В. Трунова
Чернігівський національний технологічний університет, Україна

ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТУ ТЕОРІЇ НЕПЕРЕРВНИХ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ЗМІНИ СТАНІВ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ

Постановка проблеми. В останні роки в зв’язку з кардинальними соціально-економічними змінами, що відбулися в Україні, виникла об’єктивна необхідність внесення суттєвих коректив у вітчизняну систему вищої освіти.

На сьогодні науково-дослідна діяльність математизується, при цьому стрімко зростає роль стохастичних методів у всіх сферах людської діяльності.

Метою навчання стохастики у вузі стає формування стохастичної компетентності майбутніх фахівців як складової професійної компетентності. Підготовка висококваліфікованого фахівця в галузі економіки і управління неможлива без формування необхідних професійних компетенцій, зокрема, в аналізі, прогнозуванні та прийнятті рішень в економічній діяльності підприємств [7].

Процеси зміни станів виробничих систем або їх частин, зокрема, робочих місць, відбуваються в умовах невизначеності, що вимагає впровадження методів її урахування у практику моделювання таких процесів і відкриває широкі можливості для створення адекватних баз виробничих знань на підприємствах [1].

Саме тому проблеми методики навчання студентів економічних та управлінських спеціальностей методам і моделям визначення зміни станів системи (підприємства, цеха, відділення, лінії) за допомогою яких можна зробити більш виважений вибір, який буде обґрунтований як математично, так і економічно, є актуальними.

Аналіз актуальних досліджень. Зі всіх існуючих різновидів Марківських процесів в задачах моделювання зміни станів виробничих систем або їх частин знайшли застосування процеси з дискретними станами. Марківські процеси з дискретними станами і дискретним часом використовуються для моделювання динаміки станів виробничих систем в умовах, коли неможливо вести неперервні спостереження за різними станами об’єктів і такі спостереження виконуються епізодично з фіксацією станів.

Теоретичні основи цих процесів обґрунтував видатний російський математик Андрій Андрійович Марков (1856 - 1922), завдяки роботам якого можна успішно вирішувати багато статистичних задач у різних галузях, особливо актуальним є застосування стохастичних матриць у розв'язанні проблем в галузі економіки та управління підприємствами.

До вивчення даної проблеми долучалося багато відомих зарубіжних та вітчизняних вчених, зокрема В.В. Вітлінський, Г.І. Великоіваненко, С.М. Клименко, Ю.А. Мішура, С.І. Наконечний, М.О. Перестюк та багато інших. Доцільність й ефективність застосування теорії Марківських ланцюгів при моделюванні процесів, які відбуваються у виробничих системах, доведена у низці робіт [1-3, 5, 7, 8].

Але, проблемі методики навчання методам і моделям визначення зміни станів виробничої системи із застосуванням апарату теорії неперервних Марківських ланцюгів студентів економічних та управлінських спеціальностей в науковій та методичній літературі належна увага не приділена.

Мета написання статті – адаптація існуючих математичних методів до сучасної практики управління, зокрема визначення зміни станів виробничої системи із застосуванням апарату теорії неперервних Марківських ланцюгів. Придбання навичок розв'язання таких завдань на ЕОМ в зв'язку з великим обсягом обчислювальних процедур (обчислення визначника, перетворення матриць, множення матриць, знаходження власних векторів і власних чисел і т. д.) [4, 6].

В якості програмного забезпечення дослідження статистичних процесів на основі Марківських ланцюгів з неперервним часом використаємо пакет MathCAD, де додатково можна досліджувати стійкість розв'язку системи диференціальних рівнянь Колмогорова.

Розглянемо особливості введення, виведення даних та інтерпретації результатів, що становить значний інтерес для користувачів в умовах застосування англійських версій програмного забезпечення.

При моделюванні за схемами ланцюгів Маркова однією з основних задач є визначення елементів матриці перехідних ймовірностей. Вирішення даної проблеми для такого виробництва, в якому налагоджений збір і обробка статистичних даних про стани елементів системи, є нескладним завданням.

Виклад основного матеріалу. Зміни або переходи економічних систем найчастіше носять випадковий характер. Ланцюг таких переходів з одного стану в інший може бути описаний за допомогою стохастичних (імовірнісних) матриць, що мають відповідні властивості. Теорія Марківських ланцюгів є інструментом для аналізу таких процесів, каскадів, систем, в яких перехід з одного стану в інший залежить тільки від її стану в даний час і не залежить від того, коли і яким чином система прийшла в цей стан.

При розгляді таких систем необхідні певні навички у вирішенні наступних питань:

• математична постановка задачі і представлення розміченого графа системи;

• оцінка станів системи на кілька кроків вперед, включаючи випадок заданого вектору початкового стану;

• оцінка граничних станів при наближенні системи до стаціонарного стану, включаючи випадок «живучих» систем (блукаючих процесів) з відтворенням станів;

• оцінка «живучості» (тривалості функціонування) систем, що містять стан поглинання;

• прогноз стану системи, виходячи з інтенсивності потоку.

Неперервні Марківскі ланцюги. Марківський випадковий процес з дискретними станами і неперервним часом називають «неперервний ланцюг Маркова». Для такого процесу ймовірність переходу зі стану, e_i до e_j для будь-якого моменту часу дорівнює нулю. Замість ймовірності переходу p_{ij} в цьому випадку розглядають щільність ймовірності переходу λ_{ij}, яка визначається як границя відношення ймовірності переходу зі стану e_i до стану e_j за проміжок часу Δt ($\Delta t \to 0$). Щільність ймовірності переходу може бути як сталою ($\lambda_{ij} = const$), так і залежною від часу ($\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$). У першому випадку Марківський випадковий процес з дискретними станами і неперервним часом називається однорідним.

Щільності ймовірностей переходів розглядаються як інтенсивності λ_{ij} найпростіших потоків подій, під впливом яких відбувається перехід системи зі стану e_i до стану e_j.

Потоком подій прийнято називати послідовність однорідних подій, що з'являються одна за іншою в випадковий момент часу t (потік автомашин, що проходять через митний пост; потік викликів на станції швидкої допомоги; потік клієнтів, що знімають кошти з рахунку в банку). На практиці зазвичай розглядають найпростіші потоки подій, які характеризуються властивостями стаціонарності, ординарності і відсутності наслідків.

Потік подій називається стаціонарним, якщо ймовірність влучення того чи іншого числа подій на будь-який інтервал часу залежить тільки від довжини τ цього інтервалу і не залежить від того, де саме на осі часу він розташований.

Потік подій називається ординарним, якщо ймовірність одночасного надходження двох і більше подій дорівнює нулю, що означає, що події в потоці з'являються «поодинці», а не групами по дві, по три і т. д.

Потік подій називається потоком без наслідків, якщо число подій, що потрапляють на будь-який інтервал часу τ, не залежить від того, скільки подій потрапило на будь-який інший інтервал, що не перетинається з ним. Відсутність післядії означає, що події, що утворюють потік, з'являються в ті чи інші моменти часу незалежно одна від одної.

Ординарний потік подій без наслідків називається Пуассонівским. Найпростіший потік є окремим випадком Пуассонівского потоку, що має властивість стаціонарності. Випадковий процес $X(t)$ - число подій, що з'явилися до моменту t в найпростішому потоці, визначається виходячи з закону Пуассона

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}, \; n = 0,1,2,\ldots,k$$

де n – число станів системи, λ – інтенсивність потоку.

У разі, коли система має кінцеве число станів, імовірності станів $p_1(t)$, $p_2(t)$,…, $p_n(t)$ в момент часу t знаходяться з системи диференціальних рівнянь (рівнянь Колмогорова), що мають вид

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_{ji} p_j(t) - p_i(t) \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}, \; i = 0,1,2,\ldots,n$$

де добуток $\lambda_{ij} p_j(t)$ – потік ймовірності переходу зі стану S_i до стану S_j.

Дані рівняння зручно складати, користуючись розміченим графом станів системи і наступним мнемонічним правилом: похідна ймовірності кожного стану дорівнює сумі всіх потоків імовірності, що переводять з інших станів в даний, мінус сума всіх потоків імовірності, що переводять з даного стану в інші.

Щоб розв'язати дану систему диференціальних рівнянь потрібно задати початковий розподіл імовірностей $p_1(0)$, $p_2(0)$,..., $p_n(0)$, сума яких дорівнює одиниці $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$ [3].

Приклад. Нехай задана [1] стохастична система, граф якої зображений на рис. 1. Обчислити граничні ймовірності станів p_1, p_2, p_3, p_4, якщо інтенсивності потоків подій дорівнюють $\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{14} = 1$, $\lambda_{24} = 1$, $\lambda_{31} = 3$, $\lambda_{41} = 2$, $\lambda_{43} = 2$.

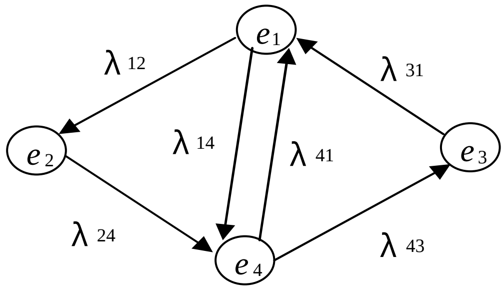

Рис. 1. Граф стохастичною системи

Розв'язання. Запишемо рівняння Колмогорова для ймовірностей станів:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{14}) \cdot p_1 + \lambda_{31} \cdot p_3 + \lambda_{41} \cdot p_4; \\ \dfrac{dp_2}{dt} = -\lambda_{24} \cdot p_2 + \lambda_{12} \cdot p_1; \\ \dfrac{dp_3}{dt} = -\lambda_{31} \cdot p_3 + \lambda_{43} \cdot p_4; \\ \dfrac{dp_4}{dt} = -(\lambda_{41} + \lambda_{43}) \cdot p_4 + \lambda_{14} \cdot p_1 + \lambda_{24} \cdot p_2. \end{cases}$$

Вважаючи ліві частини рівними нулю, і підставивши значення λ_{ij}, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для граничних ймовірностей станів:

$$\begin{cases} -3p_1 + 3p_3 + 2p_4 = 0, \\ 2p_1 - p_2 = 0, \\ -3p_3 + 2p_4 = 0, \\ p_1 + p_2 - 4p_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь з урахуванням умови $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, отримаємо $p_1 = \frac{4}{17}$, $p_2 = \frac{8}{17}$, $p_3 = \frac{2}{17}$, $p_4 = \frac{3}{17}$.

Це означає, що в граничному сталому режимі розглянута система буде перебувати в стані e_1 в середньому $\frac{4}{17}$ частини часу, в стані e_2 – $\frac{8}{17}$, в стані e_3 – $\frac{2}{17}$ і в стані e_4 – $\frac{3}{17}$.

Постановка і розв'язання задачі для неперервних Марківських ланцюгів. Нехай нормально працює виробнича система (стан e_0), що відповідає найпростішому потоку відмов з інтенсивністю λ_{01}, переходячи в новий стан e_1, в якому вона деякий час може працювати з невиявленими відмовами. Як тільки відмова виявляється (інтенсивність виявлення λ_{12}), проводиться діагностика (аналіз, огляд) виробничої системи (стан e_2). У результаті огляду, виробнича система або потребує корегування (ремонту) (стан e_3) з інтенсивністю λ_{23}, або оновлюється (стан e_4) з інтенсивністю λ_{24}. Зі стану e_3 з інтенсивністю λ_{30} і зі стану e_4 з інтенсивністю λ_{40} виробнича система переходить в робочий стан e_0. Знайти розподіл ймовірностей станів для будь-якого моменту часу і фінальні ймовірності станів.

Розв'язання: Марківський процес з дискретними станами зручно ілюструвати за допомогою розміченого графа станів. Граф станів для сформульованої задачі наведено на рис. 2.

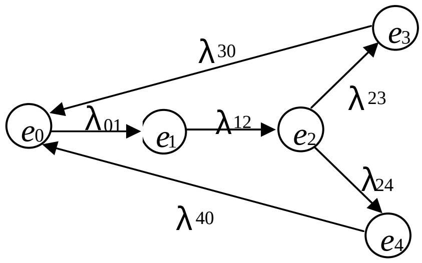

Рис. 2. Розмічений граф станів системи

Користуючись розміченим графом станів системи, складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = \lambda_{40}p_4 + \lambda_{30}p_3 - \lambda_{01}p_0, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{12}p_1, \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}p_1 - \lambda_{23}p_2 - \lambda_{24}p_2, \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda_{23}p_2 - \lambda_{30}p_3, \\ \dfrac{dp_4}{dt} = \lambda_{24}p_2 - \lambda_{40}p_4. \end{cases}$$

і умова $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.

Для визначеності надамо параметрам, наведеним в системі диференціальних рівнянь, наступні значення: $\lambda_{01} = 0{,}5$, $\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{23} = 1{,}5$, $\lambda_{24} = 1{,}5$, $\lambda_{30} = 0{,}8$, $\lambda_{40} = 2$.

Задамо початкові умови, тобто розподіл ймовірностей станів в початковий момент часу: $p_0(0) = 1$, $p_1(0) + p_2(0) + p_3(0) + p_4(0) = 0$.

В результаті отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = 2p_4 + 0{,}8p_3 - 0{,}5p_0, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = 0{,}5p_0 + 2p_1, \\ \dfrac{dp_2}{dt} = 2p_1 - 3p_2, \\ \dfrac{dp_3}{dt} = 1{,}5p_2 - 0{,}8p_3, \\ \dfrac{dp_4}{dt} = 1{,}5p_2 - 2p_4. \end{cases}$$

Дану систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами можна розв’язати аналітично (методом виключення невідомих, методом Ейлера або за допомогою перетворень Лапласа), але при великій розмірності даної системи [1], краще отримати її чисельний розв'язок на ЕОМ.

Для отримання чисельного розв’язку системи використовуємо програму MathCAD, яка має необхідні функції для розв’язання диференціальних рівнянь різними методами. Скористаємося загальноприйнятою процедурою розв’язання на основі методу Рунге-Кутта. В якості опції, що дозволяє отримати розв’язок, виберемо функцію $rkfixed\,(p_0, t_0, t_1, M, D)$,

де p_0 – початкові умови,

t_0, t_2 – початкова і кінцева точки розрахунку відповідно,

M – число кроків,

$D = D(t, p)$ – матрична форма правих частин системи диференціальних рівнянь.

Лістинг з введеними параметрами і отриманим результатом розв’язання в системі MathCAD [4] представлений на рис. 3.

$$p := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t,p) := \begin{pmatrix} -0.5p_0 + 0.8p_3 + 2p_4 \\ 0.5p_0 - 2p_1 \\ 2p_1 - 3p_2 \\ 1.5p_2 - 0.8p_3 \\ 1.5p_2 - 2p_4 \end{pmatrix}$$

$$Z := rkfixed(p, 0, 5, 15, D)$$

Z =

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	0	0	0	0
1	0.333	0.849	0.111	0.033	$4.398 \cdot 10^{-3}$	$3.472 \cdot 10^{-3}$
2	0.667	0.73	0.151	0.071	0.026	0.021
3	1	0.648	0.161	0.093	0.057	0.042
4	1.333	0.597	0.157	0.101	0.087	0.057
5	1.667	0.568	0.151	0.102	0.111	0.067
6	2	0.553	0.146	0.1	0.13	0.071
7	2.333	0.546	0.142	0.097	0.143	0.072
8	2.667	0.543	0.139	0.095	0.151	0.072
9	3	0.542	0.137	0.093	0.157	0.071
10	3.333	0.541	0.136	0.092	0.161	0.07
11	3.667	0.541	0.136	0.091	0.163	0.069
12	4	0.54	0.135	0.091	0.165	0.069
13	4.333	0.54	0.135	0.09	0.166	0.068
14	4.667	0.54	0.135	0.09	0.167	0.068
15	5	0.54	0.135	0.09	0.167	0.068

Рис. 3. Розв’язання системи диференціальних рівнянь

З розв’язання (рис. 3) випливає, що через період часу *t=4* настає стабілізація випадкового процесу. Фрагмент фазового портрета для $p_1(t)$ і $p_2(t)$ наведено на рис. 4.

Стійкість рішення підтверджується фазовим портретом (рис. 3), узятим для однієї з десяти можливих проекцій отриманих рішень.

Додатково для ілюстрації чисельного рішення як функції часу наведемо відповідні графіки (рис. 5).

Для перевірки розв’язання системи диференціальних рівнянь на стійкість доцільно скористатися функцією відшукання власних чисел *eigenvals(A)*, наявною в системі MathCAD. Результати обчислення вектору власних чисел матриці *A* наведені нижче:

$$A := \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.8 & 2 \\ 0.5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -3.523 \\ 0 \\ -1.848+1.123i \\ -1.848-1.123i \\ -1.08 \end{pmatrix}$$

Беручи до уваги теорему про стійкість розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами, зауважимо, що корені характеристичного рівняння матриці *А* не мають додатних дійсних частин, отже, отриманий розв'язок стійкий.

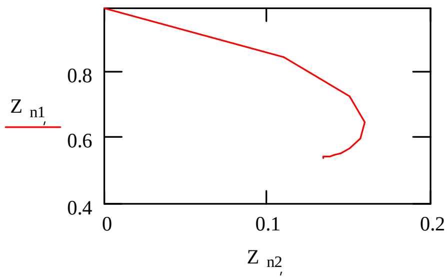

Рис. 4. Проекція фазової траєкторії для $p_1(t)$ *і* $p_2(t)$

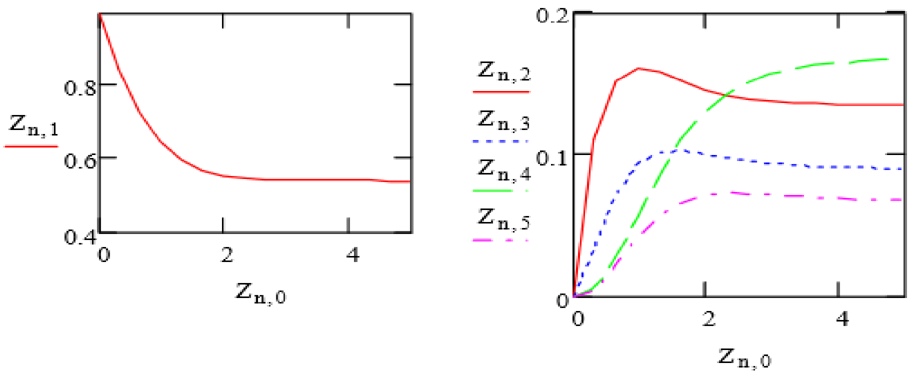

Рис. 5. Графіки ймовірностей станів як функції часу

Проблема стійкості для даного класу задач є актуальною, оскільки передбачається знаходження фінальних ймовірностей для стохастичних систем, описуваних за допомогою диференціальних рівнянь Колмогорова.

Для обчислення фінальних ймовірностей покладемо ліві частини в системі диференціальних рівнянь Колмогорова рівними нулю, отримаємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Беручи до уваги нормувальну умову для ймовірностей, і відкидаючи одне з рівнянь системи, отримаємо неоднорідну систему лінійних рівнянь. Для розв'язання системи засобами MathCAD скористаємося функцією *lsolve(A, b)*. Результати обчислення фінальних імовірностей наведені нижче.

$$\mathrm{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 0.539 \\ 0.135 \\ 0.09 \\ 0.169 \\ 0.067 \end{pmatrix}$$

При цьому фінальні ймовірності можна тлумачити як середній час перебування системи в даному стані. Дана система в середньому 54% часу буде працювати нормально, 13,5% часу працювати з невиявленою відмовою, 9% часу буде витрачено на діагностику, 17% часу на корегування і близько 7% витрачається на оновлення.

Знання фінальних ймовірностей можна використовувати для оцінки ефективності роботи системи. Для цього досить задати вектор вартостей перебування системи в кожному з станів [3], які можна інтерпретувати як дохід або витрати в одиницю часу. Тоді в граничному, стаціонарному режимі середній дохід в одиницю часу G буде обчислюватися як скалярний добуток вектору фінальних ймовірностей $P=(p_1, p_2,..., p_n)$ на вектор вартостей $C=(c_1,c_2,...,c_n)$, тобто $G=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot c_i$, де n - число станів системи.

Висновки. Запропоновані задачі можуть бути використані для проведення практичних занять з розділу «Випадкові процеси» курсу теорії ймовірностей та математичної статистики, а також для моделювання виробничо-економічних, бюджетно-фінансових та інших стохастичних систем в процесі виконання курсових і дипломних робіт, що безпосередньо вплине на формування стохастичної компетентності майбутнього економіста.

Список використаних джерел

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с., ил
2. Дынкин Е.Б. Управляемые Марковские процессы и их приложения / Е.Б. Дынкин, А.А. Юшкевич. – М.: Наука, 1975. – 339 с.
3. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2 ч. - Ч. ІІ: Математична статистика / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний, С.С. Савіна. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.
4. Іглін С. П. Теорія ймовірностей та математична статистика на базі MATLAB: Навч. посіб. – Харків: НТУ "ХПІ", 2006. – 612 с. – Рос. мовою.
5. Кемени Дж. Конечные цепи Маркова / Дж. Кемени. – М.: Наука, 1970. – 271 с.
6. Муха В.С., Птичкин В.А. Введение в MATLAB: Метод. пособие для выполнения лаб. работ по курсам «Статистические методы обработки данных» и «Теория автоматического управления» для студ. спец. 53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации». – Мн.: БГУИР, 2002. – 40 с.
7. Таха Хэдми А. Введение в исследование операций [Текст]: научно-популярная литература /Хэмди А. Таха / 6-е изд.– М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.– 911 с.
8. Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Советское радио, 1997. – 488 с.
9. Трунова О.В. Застосування апарату теорії Марківських процесів при визначенні стратегії економічного розвитку // Наукові записки. – Випуск 141. Ч.І. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2015. – С.87-92

Анотація. Трунова О.В. Застосування апарату теорії неперервних Марківських ланцюгів при визначенні зміни станів виробничих систем

В статті запропоновані шляхи адаптації існуючих математичних методів до сучасної практики управління, зокрема визначення зміни станів виробничої системи із застосуванням апарату теорії неперервних Марківських ланцюгів. У зв'язку з великим обсягом обчислювальних процедур при вирішенні таких завдань (обчислення *визначника, перетворення матриць, множення матриць, знаходження власних векторів і власних чисел і т. д.) розглядається методика їх розв'язання на ЕОМ. В якості програмного забезпечення використано пакет MathCAD. Зокрема, описані особливості введення, виведення даних та інтерпретації результатів, що становить значний інтерес для користувачів в умовах застосування англійських версій програмного забезпечення. При використанні пакету MathCAD додатково можна досліджувати стійкість розв'язку системи диференціальних рівнянь Колмогорова, що надає змогу визначити фінальні ймовірності - середній час перебування системи в відповідному стані.*

Запропоновані задачі можуть бути використані для проведення практичних занять з розділу «Випадкові процеси» курсу теорії ймовірностей та математичної статистики, а також для моделювання виробничо-економічних, бюджетно-фінансових та інших стохастичних систем в процесі виконання курсових і дипломних робіт майбутніми економістами.

Ключові слова: *неперервні Марківські ланцюги, стан виробничої системи, MathCAD.*

Аннотация. Трунова Е.В. Применение аппарата теории непрерывных Марковских цепей при определении изменений состояния производственных систем

В статье предложены пути адаптации существующих математических методов в современной практике управления, в частности определения изменения состояний производственной системы с применением аппарата теории непрерывных Марковских цепей. В связи с большим объемом вычислительных процедур при выполнении таких задач (вычисления определителя, преобразования матриц, умножение матриц, нахождение собственных векторов и собственных чисел и т. д.) рассматривается методика их решения на ЭВМ. В качестве программного обеспечения использован пакет MathCAD. В частности, описаны особенности ввода, вывода данных и интерпретации результатов, что представляет значительный интерес для пользователей в условиях применения английских версий программного обеспечения. При использовании пакета MathCAD дополнительно можно исследовать устойчивость решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова, что дает возможность определить финальные вероятности - среднее время пребывания системы в соответствующем состоянии.

Предложенные задачи могут быть использованы для проведения практических занятий по разделу «Случайные процессы» курса теории вероятностей и математической статистики, а также для моделирования производственно-экономических, бюджетно-финансовых и других стохастических систем в процессе выполнения курсовых и дипломных работ будущими экономистами.

Ключевые слова: *непрерывные Марковские цепи, состояние производственной системы, MathCAD.*

Abstract. Trunova H. Application of the theory of continuous Markov chains in determining changes in the status of production systems

The paper suggests ways to adapt existing mathematical methods in modern management practices, in particular the determination of changes in the state of the *production system using the apparatus of the theory of continuous Markov chains. Due to the large amount of computational procedures when performing such tasks (calculation of the determinant of transformation matrices, matrix multiplication, finding the eigenvectors and eigenvalues and etc.) the technique to solve them on a computer. As the software used MathCAD package. In particular, it describes the features of the input, the output and the interpretation of results, which is of considerable interest to users under the conditions of use of the English versions of the software. When using of MathCAD can further investigate the stability of the system of differential equations of Kolmogorov, which makes it possible to determine the probability of the final - the average residence time in the appropriate system status.*

The proposed tasks can was used for practical training under the heading "Random Processes" course of probability theory and mathematical statistics, as well as to simulate production and economic, fiscal, and other stochastic systems in the implementation of projects and dissertations of future economists.

Key words: *continuous Markov chains, the state of the production system, MathCAD.*