

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
 Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
 ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
 Видається з 2013.



<http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/>

Тургунбаев Р.М. О признаках делимости // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 2(12). – С. 147-150.

Turgunbaev Riskeldi. About Tests For Divisibility // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 2(12). – P. 147-150.

УДК 511.2

Р.М. Тургунбаев

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Узбекистан
 musamat1@yandex.ru

О ПРИЗНАКАХ ДЕЛИМОСТИ

Аннотация. Широко известны признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10, 11 в десятичной системе счисления. А также в книгах встречаются признаки делимости на другие числа, например на числа вида $10n \pm 1$. В этих признаках делимости для каждого делителя определяется специальное число. И делимость некоторого числа на данное число связывается с этим специальным числом. Например, для числа 19 специальным числом может быть число 2. Чтобы проверить делится ли данное число N на 19, 1) отбрасывается последняя цифра у числа N ; 2) прибавляется к полученному числу произведение отброшенной цифры на 2; 3) с полученным числом производится операции 1) и 2) до тех пор, пока не останется число, меньшее или равное 19; 4) если останется 19 то число делится на 19, в противном случае число не делится на 19. В данной статье обобщается этот результат. А именно, если $d = (10, n)$ и $d \neq 10$, то число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0}$ делится на число n тогда и только тогда, когда для любого числа x , удовлетворяющего сравнению $10 \cdot x \equiv d \pmod{n}$ имеет место сравнение $d \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 x \equiv 0 \pmod{n}$, т.е. число $d \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 x$ делится на n . Аналогичный результат верен во всех позиционных системах счисления. В статье также показано, что из этих признаков можно получить некоторые известные признаки.

Ключевые слова: признак делимости, сравнение, позиционная система счисления.

Иногда в математике приходится решать вопрос делимости или неделимости одного натурального числа на другое. Очевидно, на этот вопрос можно дать ответ, непосредственно выполняя деление. Однако если дано условие делимости на данное число или, другими словами, признак делимости на данное число, то вышесказанный вопрос легко решается. Из курса школьной математики известны признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 11 и другие числа.

В книге [1] говорится о признаке делимости на 19 (задача 4.182, стр.64): «Существует следующий способ проверить делится ли данное число N на 19:

- 1) отбрасываем последнюю цифру у числа N ;
- 2) прибавляем к полученному числу произведение отброшенной цифры на 2;
- 3) с полученным числом производим операции 1) и 2) до тех пор, пока не останется число, меньшее или равное 19;
- 4) если останется 19, то $19|N$, в противном случае $19 \nmid N$ ».

Далее авторы дают следующую задачу (4.183, стр. 65): «Аналогичные признаки существуют и для всех чисел вида $10n \pm 1$ и их делителей. Например, существует признак делимости на 21, из которого получается и признак делимости на 7. Как устроен признак делимости на 21?»

Естественно возникают вопросы: можно ли найти такие признаки делимости для других чисел? Верны ли аналогичные признаки для других позиционных систем счисления?

Чтобы решить эту задачу, воспользуемся теорией сравнения [2]. Сначала сформулируем и докажем признак делимости чисел на простое число p ($p \neq 2$).

Теорема 1. Число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0}$ делится на простое число p ($p \neq 2$) тогда и только тогда, когда для любого x , удовлетворяющего сравнению

$$10x \equiv 1 \pmod{p} \quad (1)$$

верно сравнение

$$\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 x \equiv 0 \pmod{p} \quad (2)$$

Доказательство. Необходимость. Допустим, что число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0}$ делится на p . Тогда имеет место сравнение

$$\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0} \equiv 0 \pmod{p}$$

или

$$10 \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Отсюда имеем:

$$10 \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} \equiv -a_0 \pmod{p} \quad (3)$$

Пусть теперь число x удовлетворяет сравнению (1). Умножим обе части сравнения на $-a_0$ и получим: $-10 \cdot a_0 \cdot x \equiv -a_0 \pmod{p}$. Отсюда, используя свойство симметричности сравнения, имеем

$$-a_0 \equiv -10 \cdot a_0 \cdot x \pmod{p} \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует

$$10 \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} \equiv -10 \cdot a_0 \cdot x \pmod{p} \quad (5)$$

Но обе стороны сравнения (5) можно разделить на 10, в итоге получим:

$$\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} \equiv -a_0 \cdot x \pmod{p},$$

откуда получим (2), что доказывает необходимость.

Достаточность. Допустим, что для любого x , удовлетворяющего сравнению (1), имеет место (2).

Докажем, что $p|a$.

По условию теоремы, $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 x \equiv 0 \pmod{p}$. Умножим обе части сравнения на 10. Тогда

$$10 \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + 10 \cdot a_0 x \equiv 0 \pmod{p}. \quad (6)$$

Умножая обе части сравнения (1) на a_0 имеем:

$$10 \cdot a_0 \cdot x \equiv a_0 \pmod{p} \quad (7)$$

Из сравнений (6) и (7) следует, что $10 \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 \equiv 0 \pmod{p}$ или $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0} \equiv 0 \pmod{p}$.

Теорема доказана.

Таким образом, мы частично ответили на главный вопрос, а именно, мы нашли признак делимости на простое число p ($p \neq 2$): чтобы проверить делится ли данное число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0}$ на p :

1) отбрасываем последнюю цифру у числа a ;

2) прибавляем к полученному числу произведение отброшенной цифры на число x удовлетворяющее сравнению (1);

3) с полученным числом проделываем операции 1) и 2) до тех пор, пока не останется число, делимость или не делимость которого на p легко установить;

4) если полученное число делится на p то $p|a$, в противном случае $p \nmid a$.

Например, если $p = 17$, то из (1) имеем $x = -5$ (или $-5 + 17k, k \in \mathbb{Z}$),

Теперь, используя вышедшую теорему, выведем признак делимости на 11. Найдем число x , удовлетворяющее сравнению $10x \equiv 1 \pmod{11}$. Легко проверить, что число 10 удовлетворяет данному сравнению. Но вместо $x=10$ можно взять число -1 . Тогда признак делимости на 11 можно сформулировать следующим образом:

Некоторое число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0}$ делится на число 11 тогда и только тогда, когда число $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} - a_0$ делится на 11.

Если это утверждение применить к числу $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} - a_0$, то число $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} - a_0$, а следовательно, и число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0}$ делится на число 11 тогда и только тогда, когда число $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_2} - (a_1 - a_0)$ делится на 11. Продолжая этот процесс, мы получим общеизвестный признак делимости на 11:

Для того чтобы число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делилась на 11.

Чтобы полностью ответить на первый вопрос, поставленный в начале статьи, достаточно обобщить полученный результат на составные числа. В этом случае имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $d = (10, n)$ и $d \neq 10$. Число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0}$ делится на число n тогда и только тогда, когда для любого числа x , удовлетворяющего сравнению

$$10 \cdot x \equiv d \pmod{n}, \quad (8)$$

имеет место сравнение

$$d \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 x \equiv 0 \pmod{n} \quad (9)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0}$ делится на число n . Тогда имеют место сравнения $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0} \equiv 0 \pmod{n}$, откуда $10 \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 \equiv 0 \pmod{n}$.

Из того что $d|10$, $d|n$, следует $d|a_0$. Следовательно, последнее сравнение можно разделить на d . Тогда получим следующее:

$$\frac{10}{d} \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + \frac{a_0}{d} \equiv 0 \left(\text{mod} \frac{n}{d} \right),$$

или

$$\frac{10}{d} \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} \equiv -\frac{a_0}{d} \left(\text{mod} \frac{n}{d} \right) \quad (10)$$

Сравнение (8) также разделим на d , тогда $\frac{10}{d} \cdot x \equiv 1 \left(\text{mod} \frac{n}{d} \right)$. Теперь умножим обе части этого сравнения на $-\frac{a_0}{d}$ и получим $-\frac{10}{d^2} \cdot x \equiv -\frac{a_0}{d} \left(\text{mod} \frac{n}{d} \right)$.

Отсюда, в силу свойства симметричности сравнения имеем

$$-\frac{a_0}{d} \equiv -\frac{10}{d^2} \cdot x \left(\text{mod} \frac{n}{d} \right) \quad (11)$$

Из соотношений (10) и (11) получим

$$\frac{10}{d} \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} \equiv -\frac{10 \cdot a_0 \cdot x}{d^2} \left(\text{mod} \frac{n}{d} \right) \quad (12)$$

Но $\left(\frac{10}{d}, \frac{n}{d} \right) = 1$, поэтому обе стороны сравнения (12) можно разделить на $\frac{10}{d}$:

$$\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} \equiv -\frac{a_0 \cdot x}{d} \left(\text{mod} \frac{n}{d} \right).$$

Умножая обе части и модуль сравнения на d , получим (9).

Достаточность. Пусть имеет место (9). Докажем, что $d|a$.

По условию теоремы, сравнение $d \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 x \equiv 0 \pmod{n}$ верно для любого x , удовлетворяющего сравнению $10x \equiv d \pmod{n}$.

Так как числа $d \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1}$, 0 и n делятся на d , то $d|a_0 x$. Поэтому последнее сравнение можно разделить на d :

$$\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + \frac{a_0 \cdot x}{d} \equiv 0 \left(\text{mod} \frac{n}{d} \right).$$

Умножим обе части этого сравнения на $\frac{10}{d}$. Тогда

$$\frac{10}{d} \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + \frac{10 \cdot a_0 \cdot x}{d^2} \equiv 0 \left(\text{mod} \frac{n}{d} \right) \quad (13)$$

Теперь обе части и модуль сравнения (8) разделим на d и умножим обе части на $\frac{a_0}{d}$, тогда получим

$$\frac{10 \cdot a_0}{d^2} \cdot x \equiv \frac{a_0}{d} \left(\text{mod} \frac{n}{d} \right) \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует

$$\frac{10}{d} \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + \frac{a_0}{d} \equiv 0 \left(\text{mod} \frac{n}{d} \right)$$

Умножая обе части и модуль на d , имеем $10 \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 \equiv 0 \pmod{n}$, или $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} a_0 \equiv 0 \pmod{n}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема 2 верна и для $n = 2$. В этом случае можно брать $x = 1$. Тогда число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} a_0$ делится на 2 тогда и только тогда, когда $2 \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0$ делится на 2. Откуда число делится на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра делится на 2.

С помощью теоремы 2 можно сформулировать признак делимости на 9. В этом случае $d = 1$ и $x = 1$ удовлетворяет сравнению $10x \equiv 1 \pmod{9}$. Имеет место следующее утверждение:

Некоторое число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} a_0$ делится на 9 тогда и только тогда, когда число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0$ делится на 9.

Следовательно, если дано s – разрядное число, то отбрасываем последнюю цифру, получим $(s - 1)$ -разрядное число. Добавим к этому числу отброшенную цифру. Если продолжим этот процесс, то получим известный признак делимости на число 9:

Чтобы некоторое число делилось на 9 необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр этого числа делилась на 9.

Для $n = 12$ имеем $d = (10, 12) = 2$, и сравнение $10 \cdot x \equiv 2 \pmod{12}$ равносильно сравнению $5x \equiv 1 \pmod{6}$. Одним из решений последнего сравнения является число $x = -1$. Поэтому признак делимости на число 12 можно сформулировать следующим образом:

Некоторое число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} a_0$ делится на 12 тогда и только тогда, когда число $2 \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} - a_0$ делится на 12.

Например, 1608 делится на 12, так как $2 \cdot 160 - 8 = 312$; $2 \cdot 31 - 2 = 62 - 2 = 60$; $12|60$ а число 3246 не делится на 12, так как $2 \cdot 324 - 6 = 642$; $2 \cdot 64 - 2 = 126$; $2 \cdot 12 - 6 = 18$; $12 \nmid 18$.

Для $n = 21$ ([1], задача №4.183) имеем $d = (10, 21) = 1$, и одним из решений сравнения $10 \cdot x \equiv 1 \pmod{21}$ есть число $x = -2$. Поэтому признак делимости на число 21 можно сформулировать следующим образом:

Некоторое число $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0}$ делится на 21 тогда и только тогда, когда число $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} - 2 \cdot a_0$ делится на 21.

Далее обобщим аналогичные признаки делимости чисел для других позиционных систем счисления.

Пусть число $A = (\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0})_q$ дано в q -ичной системе счисления, и дано число p , причем верны условия $(q, p) = d \neq q$.

Замечание. Все операции выполняются в q -ичной системе счисления.

Теорема 3. Число A делится на p тогда и только тогда, когда для любого числа x , удовлетворяющего сравнению

$$qx \equiv d \pmod{p}$$

выполняется сравнение

$$d \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 x \equiv 0 \pmod{p}$$

Доказательство этой теоремы почти не отличается от доказательства теоремы 2 [4].

Используя последнюю теорему, выведем признак делимости на число 9 в $q=20$ -ичной системе счисления:

Чтобы число $(\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0})_{20}$ делилось на 9 необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + 5a_0$ делилось на 9.

Из доказанных теорем следует, что в любой позиционной системе счисления существует признак делимости на любое число.

Список использованных источников

1. Алфутова Н.Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ / Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов. – М.: МЦНМО, 2002. – 264 с.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. – М.: Просвещение, 1966. – 384с.
3. Дусумбетов А. Признаки делимости (на узбекском языке) / А. Дусумбетов, Р.М. Тургунбаев // Физика, математика и информатика. – 2003. – №4. – С. 25-33.
4. Дусумбетов А. Признаки делимости в позиционных системах счисления (на узбекском языке) / А. Дусумбетов, Р.М. Тургунбаев // Физика, математика и информатика. – 2004. – №6. – С. 22-25.

References

1. Alfutova N.B., Ustinov A.V. Algebra i teoriya chisel. Sbornik zadach dlya matematicheskikh shkol. – M.: MTsNMO, 2002. – 264 s.
2. Buhstap A.A. Teoriya chisel. – M.: Prosveschenie, 1966. – 384 s.
3. Dusumbetov A., Turgunbaev R.M. Priznaki delimosti (na uzbekskom yazyike) // Fizika, matematika va informatika. – 2003. – #4. – S.25-33.
4. Dusumbetov A., Turgunbaev R.M. Priznaki delimosti v pozitsionnyih sistemah schisleniya (na uzbekskom yazyike) // Fizika, matematika va informatika. – 2004. – #6. – S.22-25.

ABOUT TESTS FOR DIVISIBILITY

Riskeldi Turgunbaev

Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Uzbekistan

Abstract. The features of divisibility by 2, 3, 5, 9, 10, 11 in the decimal calculation system are known very widely. And, also in some books there are the signs of divisibility by other numbers, for example, the numbers in the form $10n \pm 1$. In these divisibility tests, a special number is determined for each divisor. And, the divisibility of a number by a given number is associated with this special number. For example, for number 19, number 2 can be a special number. In order to check whether the given number N is divided by 19, 1) the last digit of the number N is discarded; 2) the product of the discarded digit and 2 is added to the resulted number, 3) with the resulting number, operations 1) and 2) are performed until a number less than or equal to 19 remains; 4) if 19 remains, that number is divided by 19, otherwise the number is not divisible by 19. In this article this result is generalized. Namely, if $d = (10, n)$ and $d \neq 10$, then a number $a = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0}$ is divided by a number n if and only if for any number x , satisfying the comparison $10 \cdot x \equiv d \pmod{n}$ there is a comparison $d \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 x \equiv 0 \pmod{n}$, i.e. the number $d \cdot \overline{a_s a_{s-1} \dots a_1} + a_0 x$ is divided by number n . A similar result is true in all positional number systems. In this article it is also shown that some of these famous signs can be obtained from these signs.

Key words: a test for divisibility, comparison, positional system of number.