Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Абрамчук В.С., Абрамчук І.В., Прищепа Д.О., Пугач О.С. Позиноміальні інтерполяційні многочлени і квадратурні формули. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 1(15). С. 11-15.

Abramchuk V., Abramchuk I., Pryshchepa D., Puhach O. Posinomial Interpolation Multiplications And Quarterless Forms. Physical and Mathematical Education. 2018. Issue 1(15). P. 11-15.

УДК 519.6

В.С. Абрамчук, І.В. Абрамчук, Д.О. Прищепа[1], О.С. Пугач
Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського, Україна
[1]daryapetruk4@gmail.com
DOI 10.31110/2413-1571-2018-015-1-001

ПОЗІНОМІАЛЬНІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ МНОГОЧЛЕНИ І КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ

Анотація. *Інтегрування погано зумовлених функцій, наближення неперервних недиференційовних функцій гладкими функціями вимагають нового підходу до розв'язування цих проблемних задач. У роботі пропонується загальний підхід до розв'язання цих проблемних задач на основі інтерполяційних позиномів довільної гладкості. Одній і тій же сітковій функції* $(S,Y)=\{x_i, y(x_i)\}_{i=1}^n$ *ставиться сім'я позиномів за рахунок комбінації вузлів сітки і параметра* γ *:* $\Pi_{n+2}(x,S,Y,\gamma)=L_{n-1}(x)+A_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)(1+\frac{\gamma-x}{h})^{\alpha}$, $\gamma\in(c;b)$ *(або* $\gamma\in(a;c)$ *якщо множник задається у формі* $(1+\frac{x-\gamma}{h})^{\alpha}$ *),* $h=b-a$, $\alpha\in R$, $L_{n-1}(x)$ *многочлен Лагранжа, що дозволяє для різних досліджуваних задач, додаткових умов, класів інтерполюючих функцій вибирати найкраще наближення (на відміну від поліноміального єдиного наближення* $L_{n-1}(x)$ *). Коефіцієнти многочлена Лагранжа і параметри* A, α *позиноміального доданка визначаються однозначно з умов інтерполяції на сітці з* $n+2$ *вузлів, якщо сіткова функція належить класу* H^n *–* n*-их різниць одного знаку. В теорії катастроф і теорії хаосу однією з основних задач є гладка заміна змінних, яка дозволяє аналізувати математичну модель на стійкість. Значення параметра* $\alpha\in R$ *є характеристикою, яка визначає на скільки гладка функція – многочлен* $L_{n-1}(x)$, *може бути прийнятливою для відображення* $S\mapsto Y$ *(якщо* α *відрізняється від* n *незначно і не прийнятливою, якщо* α *відрізняється на багато. Параметр* α *визначає ступінь ризику моделі до зовнішніх впливів). Для інтегрування гладких функцій запропонований новий підхід побудови квадратурних формул відкритого (без крайніх меж) і закритого (з межами проміжка інтегрування) типів лише на основі оптимальних пар симетричних вузлів. Це дає змогу застосувати квадратурні формули обчислення або дослідження збіжності невласних інтегралів. Вибираючи сітки з оптимальними вузлами можна будувати адаптивні квадратурні формули найвищої точності для неперервних недиференційовних функцій. Інтерполяційні позиноми на відміну від інтерполяційних поліномів можна використовувати одночасно, як коректуючі та прогнозуючі характеристики поведінки функції, що є основою розв'язання багатьох практичних задач.*
Ключові слова: *Позином, інтерполяція, квадратурні формули, оптимізаційні вузли.*

Постановка проблеми. Найбільш глибоко теоретично досліджена задача вибору найкращої поліноміальної квадратурної формули $\int_a^b f(x)dx\approx L_m(f)$, $L_m(f)=\sum_{k=0}^{m-1}p_k f(x_k)$, $a=x_0<x_1<...<x_{m-1}=b$, $X=\{x_k\}$, $P=\{p_k\}$ такої, щоб величина верхньої грані $\sup R_m(f)$, $R_m(f)=\left|\int_a^b fdx-L_m(f)\right|$ була мінімальною для функцій $f\in W^n(M;a,b)$, сіток X, вагових коефіцієнтів P : $\inf_{X,P} R_m(f)$.

При практичній реалізації квадратурних формул виникає більше проблемних питань, ніж відповідей: до якого класу функцій $W^n(M;a,b)$ віднести досліджувану підінтегральну функцію, оскільки конкретні класи обслуговують різні програмні засоби, чи враховує обрана квадратурна формула похибку зашумлення даних і як вона та похибки обчислень впливають на результат, яка швидкодія реалізації алгоритму на ЕОМ, як буде працювати алгоритм при ускладнені заданої функції, чи можуть бути враховані алгоритмом не числові дані при розв'язувані практичних задач.

Побудова адаптивних квадратурних формул на основі принципу золотого перерізу або принципу оптимальності за квазіметриками частково розв'язує проблему, оскільки ці принципи засновані на розбитті проміжка до кроку $h < eps$. І головне, як оцінити похибку квадратурної формули для неперервних або кусково-неперервних недиференційовних підінтегральних функцій. Отже, квадратурні формули до певної міри повинні бути прогнозуючими, містити пакет формул на основі яких по тим самим даним можна прийняти рішення про достовірність результату обчислень, або не коректність (чи недостачу) інформації.

Аналіз актуальних досліджень. Відшукання найкращої для заданого класу функцій квадратурної формули і отримання точної оцінки є складною задачею, вимагає, як правило, застосування глибоких і тонких фактів теорії функцій і функціонального аналізу, досліджувалась в роботах Ф. П. Василева, М. С. Бахвалова, М. М. Коробова, М. П. Корнійчука, В. П. Моторного, Д. А. Молодцова, С. М. Нікольського, С. Л. Соболєва, С. Б. Стечкіна, Ю. М. Субботіна, О. Г. Сухарева. Теорія позіномів застосовується в оптимізаційних задачах геометричного програмування. В даній роботі будуються спеціальні інтерполяційні позіноми, які характеризують швидкість зміни інтерполюючої функції при переході від одного проміжка задання до іншого.

Мета статті. Розробити загальну теорію побудови позіноміальних інтерполяційних многочленів і на їх основі побудувати квадратурні формули інтегрування погано зумовлених функцій.

Виклад основного матеріалу.

1. Загальна теорія побудови інтерполяційних позінмів і квадратурних формул. У зв'язку з розширенням кола досліджуваних задач, розвиваються нові теорії, що оперують з недиференційовними функціями, наприклад, опуклими. У теорії хаоса і катастроф важливо вміти наближати характеристики реальних процесів гладкими функціями мінімальних порядків при забезпечені заданої точності. Така ж проблемна задача виникає при розв'язуванні нелінійних рівнянь і пошуку екстремуму з функціями складної природи.

Неперервну функцію $f(x), x \in [a;b]$ віднесемо до класу $H^n, n > 1$, якщо відносна різниця n-го порядку на довільній сітці $S = \{a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_m \le b\}$ зберігає знак. Прикладами функцій класу H^2 на відрізку $[-1;1]$ є функції $y = x^2$, $y = x^2 + |x| + 1$ або погано обумовлена функція $y = \ln x / x^2$ на проміжку $[0{,}01;2]$ або многочлен Лагранжа n-го порядку на довільному проміжку $[a;b]$.

Інтерполяційний позіном на сітці з $n+2$ - ох вузлів будуватимо у формі:

$\Pi_{n+2}(x,a,b,\gamma) = L_{n-1}(x) + A_n \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)(1 + \frac{x-\gamma}{h})^{\alpha}$, де $L_{n-1}(x) = A_0 + A_1(x - x_1) + \ldots + A_n \prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$ – многочлен Лагранжа з довільним вибором n вузлів сітки S, позіноміальний член $A_n \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)(1 + \frac{\gamma - x}{h})^{\alpha}$ задається параметром $\gamma \in [S/M]$ і показником $\alpha \in R$, які визначаються з умов інтерполяції $y(x_i) = \Pi_{n+2}(x_i, a, b, \gamma),\ x_i \in S,\ h = b - a$, M – підмножина вузлів сітки S, що визначають многочлен Лагранжа L_{n-1}. Оскільки $f(x) \in H^n$, то всі коефіцієнти $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ і показник α визначаються коректно і однозначно для заданого розподілу вузлів і форми (1). Вузли сітки S можна комбінувати різними способами у сітковій функції $(S,Y) = \{x_i, y(x_i)\}_{i=1}^{n+2}$. Отже, комбінуючи вузли $\{x_i\} \in M$ і $\gamma \in S/M$, задамо множину інтерполяційних позіномів, що дозволяє оптимізувати процес розв'язання конкретної задачі. Оскільки інтерполяційний позіном є диференційовною функцією (безліч раз, якщо n не ціле додатне число), то його доцільно застосовувати при наближеному інтегруванні або диференціюванні погано зумовлених функцій, пошуку екстремуму або наближеному розв'язуванні нелінійних рівнянь, прогнозуванні кризисних явищ.

2. Квадратурні позіноміальні формули.

2.1. Оптимізіцайні квадратури для гладких функцій. Для гладких функцій побудовані оптимальні квадратурні формули Гаусса-Лежандра, або підвищеної точності Гаусса-Кронрода відкритої форми (крайні точки проміжка інтегрування виключаються із сітки інтерполяції S). Якщо ввести граничні умови, щоб застосувати ці формули для розв'язування крайових задач, то умови оптимальності формул відкритого типу не виконуватимуться.

Нехай функція $f(x) \in C^{[n]}[a;b]$, $n > 1$ – довільне натуральне число.

Запропонуємо оптимізаційні квадратурні формули відкритого типу (без крайніх вузлів) або закритого типу (з граничними умовами) для гладких функцій на основі лише оптимальних пар симетричних вузлів: $x_{1,2} = c \mp \sigma_1 h$, $x_{3,4} = c \mp \sigma_2 h, \ldots, x_{2m-1,2m} = c \mp \sigma_m h$ з центральним вузлом $x_0 = c$ або без нього, де $c = (a+b)/2$, $h = b - a$. Підінтегральну функцію подамо у формі многочлена Тейлора [3]:

$$y(x) = y(c) + \sum_{i=1}^{S} \frac{y^{(i)}(c)}{i!}(x-c)^i + R_S(x, x_0),\quad \int_a^b y(x)dx = h[y_0 + 2\sum_{i=1}^{S/2} \frac{y^{(2i)}(c)}{(2i)!} \frac{h^{2i}}{(2i+1)2^{2i+1}}] + O(h^{2S+1}) \qquad (1)$$

Функцію $y(x)$ інтерполюємо многочленом парного степеня $2m$ на симетричній сітці, якщо в сітку включений центральний вузол $x_0 = c$, або непарного степеня, якщо в сітку не включений вузол $x_0 = c$;

наприклад, $\{c - \sigma_1 h,\ c - \sigma_2 h,\ c,\ c + \sigma_2 h,\ c - \sigma_1 h\}$, $\sigma_1 > \sigma_2$, $P_4(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + A_3(x-c)^3 + A_4(x-c)^4$. Коефіцієнти A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 визначимо із умов інтерполяції $y(x_i) = y_i = P_4(x_i)$, $i = 0,1,2,3,4$, дістанемо систему лінійних алгебричних рівнянь, з якої коефіцієнти визначаються через відносні різниці: $2A_4 = w_1 = \dfrac{k_2 - k_1}{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)h^2}$, $k_1 = \dfrac{y_1 - 2y_0 + y_2}{(\sigma_1 h)^2}$, $k_2 = \dfrac{y_3 - 2y_0 + y_4}{(\sigma_2 h)^2}$, $2A_2 = k_1 - w_1(\sigma_1 h)^2$, $A_0 = y_0$.

Підставивши у формулу розкладу (1) значення вузлів x_1, x_2, x_3, x_4, дістанемо значення коефіцієнтів через скінчені різниці. Квадратурна формула набуде вигляду:

$$\int_a^b P_4(x)dx = y_0 h + \frac{h^3}{3\cdot 2^3}\left(2\frac{y''(c)}{2!} - 2\frac{y^{VI}(c)}{6!}\sigma_1^2\sigma_2^2 h^4 + 2\frac{y^{VIII}(c)}{8!}\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)h^6 + O(h^8)\right)$$
$$+\frac{h^5}{5\cdot 2^5}\left(2\frac{y^{IV}(c)}{4!} + 2\frac{y^{VI}(c)}{6!}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)h^2 + 2\frac{y^{VIII}(c)}{8!}(\sigma_1^4 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^4)h^4 + O(h^6)\right) \quad (2)$$

Зрівнюючи коефіцієнти при похідних у формулах (1), (2) до максимального порядку, дістанемо систему двох рівнянь з невідомими σ_1^2, σ_2^2 (коефіцієнти при $y^{II}(c)$, $y^{IV}(c)$ збігаються в силу симетричності двох пар вузлів, коефіцієнти при $y^{VI}(c)$, $y^{VIII}(c)$ будуть збігатись, оскільки система відносно σ_1^2, σ_2^2 є розв'язок): $\sigma_1 = 0,591757934$; $\sigma_2 = 0,269071876$,

$$\frac{y^{VI}(c)}{6!} : -\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{3\cdot 2^3} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{5\cdot 2^5} = \frac{1}{7\cdot 2^7}, \quad \frac{y^{VIII}(c)}{8!} : -\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{3\cdot 2^3} + \frac{\sigma_1^4 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2}{5\cdot 2^5} = \frac{1}{9\cdot 2^9}. \quad (3)$$

Похибка квадратурної формули $O(h^{11})$.

2.2. Найпростіші позиноміальні квадратурні формули.

Нехай функція належить класу H^1 – неперервна і монотонна.

2.2.1. Триточкові квадратурні формули закритого типу на сітці $\{a; x_1; b\}$, $a < x_1 < b$.

Для одних і тих же сіткових даних $\{S;Y\}$, $S = \{a; x_1; b\}$, $Y = \{y(a); y(x_1); y(b)\}$ позиноми можна будувати за різними формулами, наприклад, $\Pi_3(x,b) = A_0 + A_1(x - x_1)(1 + \dfrac{b-x}{h})^\alpha$, $\Pi_3(x,a) = A_0 + A_1(x - x_1)(1 + \dfrac{x-a}{h})^\alpha$, $\Pi_3(x,\gamma) = A_0 + A_1(x - x_1)(1 + \dfrac{x-\gamma}{h})^\alpha$, або в іншій формі, комбінуючи параметрами $a, x_1, b, \gamma \in (a;b)$, $\alpha \in R$ в залежності від поведінки підінтегральної функції. Параметри A_0, A_1, α обчислюються з умови інтерполяції.

Нехай $V_1 = \dfrac{y_1 - y_a}{x_1 - a}$, $V_2 = \dfrac{y_b - y_1}{b - x_1}$ – швидкості зміни підінтегральної функції $y = f(x)$ відповідно на проміжках $[a; x_1]$, $[x_1; b]$. Якщо 1) $\operatorname{sgn} V_1 = \operatorname{sgn} V_2$ (sgn – знак числа);

2*а*) $|V_1| \ge |V_2|$, то підінтегральну функцію $y = f(x)$ інтерполюємо на сітці $\{a; x_1; b\}$ позиномом $\Pi_3(x, a, x_1, b, b) = \Pi_3(x,b) = A_0 + A_1(x - x_1)(1 + \dfrac{b-x}{h})^\alpha$. У цьому випадку $\alpha \ge 0$. Параметри $\{A_0; A_1; \alpha\}$ знайдемо з умови інтерполяції: $x = x_1 : A_0 = y_1$; $x = b : \dfrac{y_b - y_1}{b - x_1} = A_1 = V_2$; $x = a : \dfrac{y_a - y_1}{a - x_1} = \dfrac{y_1 - y_a}{x_1 - a} = V_1 = A_1 \cdot 2^\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{\ln B}{\ln 2}$, де $B = \dfrac{V_1}{V_2} \ge 1$, тому $\alpha \ge 0$.

$$S(\Pi_3(x,b)) = \int_a^b \Pi_3(x,b)dx = y_1 h - \frac{h}{\alpha+1}[V_2(b - x_1) + 2V_1(x_1 - a) + \frac{h}{\alpha+2}(V_2 - 4V_1)]. \quad (4)$$

Нехай 2б) $|V_2| \ge |V_1|$, тоді підінтегральну функцію $y = f(x)$ на сітці $\{a; x_1; b\}$ інтерполюємо позиномом

$$\Pi_3(x,a) = A_0 + A_1(x - x_1)(1 + \frac{x-a}{h})^\alpha, \quad \int_a^b \Pi_3(x,a)dx = y_1 h + \frac{h}{\alpha+1}[2(b - x_1)V_2 + (x_1 - a)V_1 + \frac{h}{\alpha+2}(4V_2 - V_1)] \quad (5)$$

Наведемо результат для випадку $|V_1| > |V_2|$, $\gamma = c$:

$$\Pi_3(x,c) = A_0 + A_1(x - x_1)(1 + \frac{c-x}{h})^\alpha, \ V_1 = A_1(\frac{3}{2})^\alpha, \ V_2 = A_1(\frac{1}{2})^\alpha, \ B = V_1/V_2 = 3^\alpha \Rightarrow \alpha = \ln B/\ln 3.$$

На місце квадратурної формули (4) дістанемо квадратурну формулу

$$S(\Pi_3'(x,c)) = y_1 h - \frac{h}{\alpha+1}[\frac{1}{2}V_2(b - x_1) + \frac{3}{2}V_1(x_1 - a) + \frac{h}{\alpha+2}(\frac{1}{4}V_2 - \frac{9}{4}V_1)] \quad (6)$$

2.2.2. Позиноміальні чотириточкові квадратурні формули $S(\Pi_4(x,\gamma))$.

Якщо функція $y = f(x)$ на проміжку $[a;b]$ неперервна і опукла, то позиноміальну інтерполяцію можна здійснити на чотириточковій сітці $\{a; x_1; x_2; b\}$, $a < x_1 < x_2 < b$. Клас позиномів дає достатньо широку базу побудови квадратурних формул.

Нехай позіном має вид: $\Pi_4(x,\gamma)=A_0+A_1(x-x_1)+A_2(x-x_1)(x-x_2)(1+\frac{x-a}{h})^{\alpha}$.

$$S(\Pi_4(x,a))=\int_a^b \Pi_4(x,a)dx = A_0h + A_1\frac{(b-x_1)^2-(x_1-a)^2}{2}+\frac{h}{\alpha+1}[2B_2(b-x_1)(b-x_2)-B_1(x_1-a)(x_2-a)- \\ -\frac{h}{\alpha+2}(4B_2(2b-(x_1+x_2))+B_1(x_1+x_2-2a)-\frac{2h}{\alpha+3}(8B_2-B_1))]. \quad (7)$$

Якщо вузи x_1,x_2 симетричні відносно $c=\frac{a+b}{2}$: $x_1=c-\sigma_1 h$, $x_2=c+\sigma_1 h$, $0<\sigma_1<\frac{1}{2}$, то формула (7) набуває вигляду

$$\int_a^b \Pi_4(x,a)dx = S(\Pi_4(x,a)) = A_0h + A_1\sigma_1 h^2 + \frac{h^3}{\alpha+1}[(\frac{1}{4}-\sigma_1^2)(2B_2-B_1)-\frac{1}{\alpha+2}(4B_2+B_1-\frac{2}{\alpha+3}(8B_2-B_1))]. \quad (8)$$

2.2.3. Квадратурні формули на основі оптимізаційних вузлів.

Якщо функція погано зумовлена на проміжку $[a;b]$, то перевагу мають квадратурні формули, що використовують оптимізаційні вузли. Квадратурні формули на сітках з оптимізаційними вузлами будуються аналогічно до попередніх.

Триточкова сітка з оптимізаційними вузлами:

$$S=\{x_1,x_2,x_3\}\subset(a;b),\ x_2=c,\ x_1=c-\sigma_1 h,\ x_2=c+\sigma_2 h,\ h=b-a,\ \sigma_1=\sqrt{15}/10,\ c=(a+b)/2.$$

П'ятиточкова сітка з двома парами симетричних оптимізаційних вузлів:

$$S=\{c-\sigma_1 h, c-\sigma_2 h, c, c+\sigma_2 h, c+\sigma_1 h\},\ \sigma_1=\sqrt{5(1+\sqrt{8/35}}/6,\ \sigma_2=\sqrt{5(1-\sqrt{81/35}-1}/6.$$

Чотириточкова сітка закритого типу з однією парою симетричних оптимізаційних вузлів:

$$S=\{a, c-\nu h, c+\nu h, b\},\ \nu=\sqrt{2}/10.$$

Чотириточкова сітка відкритого типу з однією парою симетричних оптимізаційних вузлів:

$$S=\{c-\sigma_1 h, c-\sigma_2 h, c+\sigma_2 h, c+\sigma_1 h\},\ \sigma_1=0,476090938, \sigma_2=0,098851031.$$

Сітка з кратними крайніми вузлами і оптимізаційними внутрішніми для побудови ермітових сплайнів і розв'язання крайових задач. Сітка

$$S=\{a; c-\sigma_1 h, c, c+\sigma_1 h; b\},\ \{Y(a), Y'(a), Y(c-\sigma_1 h), Y(c+\sigma_1 h), Y(b), Y'(b)\}, \sigma_1=\sqrt{3}/6.$$

Коректність квадратурних формул випливає з коректності побудови позіномів.

Теорема 1. Якщо функція $y=f(x)$ на проміжку $[a;b]$ неперервна і монотонна, то позіноми $\Pi_3(x,\gamma)=A_0+A_1(1+\frac{\gamma-x}{h})^{\alpha}$, $c\le\gamma\le b$ (або $\Pi_3(x,\gamma)=A_0+A_1(1+\frac{x-\gamma}{h})^{\alpha}$, $a\le\gamma\le c$), існують і їх параметри $\{A_0,A_1,\alpha\}$ визначаються однозначно за значеннями $f(x)$ у вузлах сітки $\{a;x_1;b\}$.

Теорема 2. Якщо функція $y=f(x)$ на проміжку $[a;b]$ неперервна, монотонна і опукла, то позіноми $\Pi_4(x,\gamma)=A_0+A_1(x-x_1)+A_2(x-x_1)(x-x_2)(1+\frac{\gamma-x}{h})^{\alpha}$, $c\le\gamma\le b$ існують і їх параметри визначаються однозначно.

Доведення теорем. Якщо інтерполююча функція на сітці $\{S,Y\}_{i=1}^m$ належить класу H^n, $n>1$, $n\in N$, $m\ge n+1$, то відносні різниці $n-$го порядку є одного знаку, тому існує многочлен Лагранжа $L_{n-1}(x)$ і позіном $\Pi_{n+2}(x,S,Y,a)=L_{n-1}(x)+A_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)(1+\frac{x-a}{h})^{\alpha}=A_0+A_1(x-x_1)+...+A_{n-1}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)+A_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)(1+\frac{x-a}{h})^{\alpha}$, де коефіцієнти $A_0,A_1,...,A_n$ послідовно є різницями до (n-1) – го порядку на сітці $S_1=\{a,x_1,...,x_{n-1}\}$ [1, 3]. То показник α є розв'язком рівняння $(y_b-L_{n-1}(b-x_i)/A_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=d^{\alpha}=2^{\alpha}$, де в лівій частині є відношення двох різниць $n-$го порядку на сітці $\{a,x_1,...,x_{n-1},b\}$ (додатна величина, як відношення різниць одного знаку). Аналогічно доводяться теореми для позіномів $\Pi_n(x,S,Y,\gamma)$ з тією відмінністю, що основу $d>1$ можна змінювати, в залежності від вибору $\gamma\in[a;c]$ або $\gamma\in[c;b]$ [1, 2]. Показник $\alpha\in R$ визначає логарифмічну швидкість зміни функції при переході з сітки S_1 на сітку $S_2=\{x_1,...,x_{n-1},b\}$.

Висновки. 1. Обгрунтований новий підхід до проблеми наближення неперервних функцій гладкими позіноміальними многочленами, які дають можливість прогнозувати ступінь зумовленості функції при переході від одного проміжка до іншого. 2. Показане практичне застосування позіномів до побудови квадратурних формул.

Список використаних джерел

1. Проблема прогнозування в задачах математичного моделювання / Абрамчук В.С. та ін. Фізико-математична освіта. 2016. Випуск 2(8). С. 9-16.
2. Абрамчук В. С., Абрамчук І. В. Наближене інтегрування жорстких задач. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2012. №7. С. 3-17.
3. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и програмное обеспечение / пер. с англ. М.: Мир, 2001. 575 с.
4. Коробов Н. М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963. 224 с.
5. Корнейчук Н. П., Никольский С. М. О Новых результатах по экстремальным задачам теории квадратур/ В книге С. М. Никольский. Квадратурные формулы, 1974. С. 138-221.

6. Молодцов Д. А. Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987. 280 с.
7. Моторный В. П. О наилучшей квадратурной формуле для некоторых классов периодических дифференцируемых функций / Докл. Анн СССР 21, №5, 1973. С. 1060-1062.
8. Никольский С. М. Квадратные формулы. М.: Наука, 1974. 136 с.

References

1. Abramchuk, V., Abramchuk. I., Petruk, D., Puhach, O., Yuzva, A. (2016). Problem of forecasting in problems of mathematical modeling. Physics and mathematics education, Sumy State Pedagogical University named after AS Makarenko, 2 (8), 9-13.
2. Abramchuk, V., Abramchuk, I. (2012). Approximate integration of hard tasks. Mathematical and computer modeling. Series: Physics and mathematics, 7, 3-17.
3. Kahaner, D., Mooler, K., Nash, S. (2001). Numerical methods and software, (Trans. from English). Moscow, Russia: Mir. 575.
4. Korobov, N. (1963). Theoretical numerical methods in approximate analysis. Moscow: Fizmatgiz. 224.
5. Korneichuk, N., Nikolsky, S. On New Results in Extreme Problems of Quadrature Theory. 138-221.
6. Molodtsov, D. (1987). Stability of principles of optimality. Moscow, Russia: Nauka. 280.
7. Motornuy, V. (1973). On the best quadrature formula for certain classes of periodic differentiable functions. Dokl. Ann SSSR 21, 5, 1060-1062.
8. Nikolsky, S. (1974). Square formulas. Moscow, Russia: Nauka, 136.

POSINOMIAL INTERPOLATION MULTIPLICATIONS AND QUARTERLESS FORMS

Vasil Abramchuk, Ihor Abramchuk, Daria Pryshchepa, Olena Puhach
Vinnitsa State Pedagogical University named after M. Kotsybinsky, Ukraine

Abstract. *Integration of poorly conditioned functions, the approximation of continuous non-differentiable functions by smooth functions, require a new approach to solving these problem problems. The paper proposes a general approach to solving these problem problems based on interpolation polynes of arbitrary smoothness. One and the same net function* $(S,Y)=\{x_i, y(x_i)\}_{i=1}^n$ *the family of poses is put at the expense of a combination of nodes of a grid and a parameter* γ *:* $\Pi_n(x,S,Y,\gamma)=L_{n-1}(x)+A_n\prod_{i=1}^n(x-x_i)(1+\frac{\gamma-x}{h})^\alpha$, $\gamma\in(a;b)$ *(or* $\gamma\in(a;c)$ *if the multiplier is given in the form* $(1+\frac{x-\gamma}{h})^\alpha$ *),* $h=b-a$, $\alpha\in R$, $L_{n-1}(x)$ *Lagrange polynomial, which allows for the various problems studied, additional conditions, classes of interpolating functions to choose the best approximation (in contrast to the polynomial uniform approximation* $L_{n-1}(x)$ *). The coefficients of the Lagrangian polynomial and the parameters* A, α *of the subordinate term are determined unambiguously from the conditions of interpolation on the grid with* $n+2$ *nodes if the net function belongs to a class* H^n *–* n *differences of one sign. In the theory of catastrophes and the theory of chaos, one of the main tasks is the smooth replacement of variables, which allows you to analyze the mathematical model for stability. The parameter* $\alpha\in R$ *value is a characteristic that determines how smooth the function is the polynomial* $L_{n-1}(x)$*, may be acceptable to display* $S\mapsto Y$ *(if* α *differs from* n *the insignificant and not acceptable, if* α *different for many. The parameter* α *determines the degree of risk of the model to external influences). To integrate smooth functions, a new approach is proposed for constructing quadrature formulas of open (without extreme bounds) and closed (with boundaries of the integration interval) types only on the basis of optimal pairs of symmetric nodes. This enables the use of quadrature computational formulas or the study of the convergence of improper integrals. When selecting meshes with optimal nodes, we can construct adaptive quadrature formulas of the highest accuracy for continuous non-differentiable functions. Interpolation zeros, unlike interpolation polynomials, can be used simultaneously as corrective and predictive features of the behavior of the function, which is the basis of solving many practical problems.*

Key words: *Position, interpolation, quadrature formulas, optimization nodes.*