Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Ковальчук М.Б. Моделювання задач математичної фізики в системі комп'ютерної математики Maple. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 2(20). С. 40-47.

Kovalchuk M. Modeling The Mathematical Physics Problem In The Computer Mathematics System Maple. Physical and Mathematical Education. 2019. Issue 2(20). Р. 40-47.

DOI 10.31110/2413-1571-2019-020-2-007
УДК 004: 37

М.Б. Ковальчук
Вінницький національний технічний університет, Україна
maya.kovalchuk@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1895-1715

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В СИСТЕМІ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ MAPLE

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Вища математика традиційно вважається одним з найважчих предметів в технічних університетах. В ній інтегруються знання з курсів алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу однієї і кількох змінних, диференціальних рівнянь. Навчання методам розв'язування та огляд прикладів застосування диференціальних рівнянь є пропедевтикою моделювання і прогнозування. Деякі обчислювальні процедури, які супроводжують цей процес, є складними і громіздкими тому використання систем комп'ютерної математики (СКМ), зокрема Maple, є могутнім засобом універсалізації та інтеграції навчально-математичної діяльності.*

Матеріали і методи дослідження. *Матеріалом дослідження є процес розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних засобами MAPLE. Метою використання спостереження, аналізу та систематизації було накопичення інформації про доцільність використання СКМ Maple при формуванні понять вищої математики. Емпіричний аналіз програмних процедур СКМ Maple та метод моделювання використовувався для створення і використання функціональних алгоритмів в теорії диференціальних рівнянь та візуалізації результатів.*

Результати. *В статті проаналізовано зміст поняття «математична модель» та представлено* схему *її створення. Виділено основні етапи математичного моделювання і визначено послідовність обчислювальних і логічних операцій для вивчення досліджуваних властивостей об'єкта. Розглянуто основні типи інформації та програмних процедур побудови математичної моделі через застосування СКМ Maple. Запропоновано декілька функціональних алгоритмів зведення лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними до канонічного вигляду засобами Maple.*

Висновки. *Узагальнюючи результати дослідження можна стверджувати, що наведені моделі дозволяють поглибити теоретичні знання та на початковому етапі навчання в університеті отримати певні навички математичного моделювання, що є необхідним для вивчення спеціальних дисциплін і сприяють підвищенню рівня підготовки майбутніх фахівців.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: рівняння математичної фізики,системи комп'ютерної математики, функціональні алгоритми, математичне моделювання.

ВСТУП

Постановка проблеми. Значну роль в сучасному розвитку суспільства відіграє інформатизація–процес, суть якого полягає в розвитку і широкомасштабному застосуванні методів і засобів отримання, накопичення, переробки, передачі, зберігання, подання і використання інформації, що забезпечує систематизацію наявних і отримання нових знань і їх використання суспільством для поточного управління і подальшого вдосконалення і розвитку.

Одним з ключових умінь майбутнього фахівця технічного профілю є здатність застосовувати математичні методи в поєднанні з інформаційними технологіями. Тому в навчанні математики різні комп'ютерні технології відіграють важливу роль оскільки вони забезпечують активну участь студентів в процесі навчання, індивідуальний підхід, наочність в представленні інформації.

Володіння хоча б однією із систем комп'ютерної математики, таких як Maple (Дьяконов, 2011; Сдвижников, 2003; Шевченко, 2015), Mathematica, MathCAD, MatLab, Maxima, дозволяє майбутньому фахівцю значно спрощувати математичні перетвореня і самостійно вирішувати складні прикладні завдання (Шевченко, 2016).

Аналіз актуальних досліджень. Інформатизація навчання вищої математики в закладах вищої технічної освіти є одним із пріоритетних напрямків модернізації системи формування базових понять та вмінь. Реалізація даного напрямку через формування прийомів роботи з комп'ютерними моделями висвітлювалась в роботах А. Ф. Верлань, М. І. Жалдака, Ю. О. Жука, Р. В. Майєр, С. А. Ракова, Ю. С. Рамського, С. О. Семерікова, І. О. Теплицького О. А. Бушкової, К. А. Дахер, Г. М. Саркєєвої, В. П. Дьяконова, Р. І. Івановського, О. В. Матросова, О. В. Мантурова і ін. Окремі дидактичні та методичні аспекти застосування СКМ у навчанні розглядались в роботах науковців А. В. Антонця, І. М. Горди, В. П. Д'яконова, А. М. Кундрат, М. М. Кундрат, В. Ф. Очкова, Ю. В. Триуса, Л. О. Флегантова, О. Г. Ясева.), зокрема, основні принципи і методи застосування СКМ Maple розглядались в працях О. С. Котюргіної, Ю. Б. Нікітіна, О. І. Федорової, О. А. Барковіч, О. Г. Пустовалової, О. О. Карабин, О. Ю. Чмир, М. І. Кусій, Я. В. Крупського, В. А. Кушніра та ін.

У вирішенні задач залучення систем комп'ютерної математики у процес навчання у вищій технічній школі досягнуто вагомих результатів, проте мало приділяється уваги використанню і складанню функціональних алгоритмів. У статті показані можливості Maple-технології в конструюванні алгоритмів та програм для автоматизації розв'язування математичних моделей рівнянь математично фізики.

Мета статті полягає в узагальненні основних принципів математичного моделювання і обґрунтуванні використання СКМ Maple при розв'язуванні задач математичної фізики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Матеріалом дослідження є процес створення алгоритмів розв'язування математичних моделей та їх реалізація засобами MAPLE. Метою використання спостереження, аналізу та систематизації було накопичення інформації про доцільність використання Maple при формуванні понять вищої математики.

Емпіричний аналіз програмних процедур Maple та метод моделювання використовувався для створення і використання функціональних алгоритмів в теорії диференціальних рівнянь та візуалізації результатів.

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

З появою і розвитком інформаційних технологій актуальною стала проблема застосування СКМ в освіті, зокрема, у вищій технічній школі. Досить часто, недостатній рівень знань математичних методів призводить до того, що студенти, а, інколи і фахівці практично не використовують аналітичні методи розрахунку, а використовують якісні описи, експеримент або емпіричні співвідношення (Баганов, 2008).

Теорія звичайних диференціальних рівнянь є одним з основних інструментів математичного природознавства. Диференціальні рівняння активно використовуються для побудови найрізноманітніших моделей - фізичних, економічних, біологічних і багатьох інших. Тому навчання методам розв'язування та огляд прикладів застосування диференціальних рівнянь є пропедевтикою моделювання і прогнозування.

Суть математичного моделювання полягає в перенесенні реальних властивостей об'єкта або процесу на деякі математичні відношення, які мають певну математичну структуру. Фізичні, хімічні, біологічні та соціальні процеси не є в цьому сенсі винятком. Одним з поширених способів вивчення явищ математичними методами є моделювання цих явищ і процесів через використання диференціальних рівнянь.

Вивчення диференціальних рівнянь у курсі вищої математики в основному орієнтується на формальне розв'язування стандартних типів рівнянь. При цьому значну частину складають систематичні методи пошуку розв'язків. Студенти концентруються на запам'ятовуванні цих методів для знайомих типів рівнянь

У цій статті ми розглянемо лінійні диференціальні рівняння другого порядку з двома незалежними змінними, зокрема, зведення їх до канонічного вигляду. В студентів не математичних факультетів виникають значні труднощі в процесі введення нових змінних і виконанні перетворень. Причинами цього є деяка абстрактність матеріалу і мала ступінь наочності. Як зазначається в роботі (Сачкова, 2012) графічна візуалізація матеріалу і особливо динамічна візуалізація засобами систем комп'ютерної математики допомагає якісному засвоєнню абстрактного матеріалу, а також глибшому розумінню досліджуваних об'єктів і явищ.

Слід також зазначити, що для неспеціалістів в математиці набагато важливішим є аспект математичного формулювання моделі та її дослідження, ніж тонкощі, пов'язані з теорією диференціальних рівнянь. Тому роботу з диференціальними рівняннями для студентів можна максимально спростити через перенесення акценту на дослідження і з'ясування їхнього зміст (Сачкова, 2013).

Такі потужні системи комп'ютерної математики, як Maple, Mathematica, MATLAB, а також навчальні середовища, як MathCAD, Derive, GRAN, змінюють уявлення про диференціальні рівняння, їх роль та можливості застосувань у науці та інженерній справі. Ці системи використовуються і для обчислень, і для графічної візуалізації з метою поглибленого розуміння концепцій, сутності задач, трактовки моделей і розв'язків.

Інтенсифікація застосування методів математичного та комп'ютерного моделювання при вивченні всіх базових курсів математики в технічному університеті з подальшою інтеграцією цільових завдань цих курсів з завданнями фундаментальних і прикладних наук дозволяють реалізувати глибше проникнення інформаційних технологій в саму суть цих предметів і тим самим істотно переорієнтувати навчальний процес і зробити його ефективнішим.

В ході побудови математичних і комп'ютерних моделей студенти засвоюють необхідні фундаментальні знання і вчаться їх практично застосувати. Слід звернути увагу на той факт, що побудова математичної моделі і її комп'ютерна реалізація виховують строгість математичного мислення, його культуру і технологічність. Цей шлях є найефективнішим способом залучення молоді в сучасну науку і інженерію (Игнатьев, 2010).

Математична модель – це еквівалент об'єкта, що відображає в математичній формі найважливіші його властивості. Трикомпонентна схема (Игнатьев, 2010) математичного моделювання – це «*модель → алгоритм → програма»*, як необхідний план дій вивчення об'єкта.

На *<u>першому етапі</u>* будується математичний образ об'єкта, який відображає в математичній формі найважливіші його властивості, тобто, математична модель.

Далі математична модель досліджується теоретичними методами, які дозволяють отримати загальні попередні знання про об'єкт.

На *другому етапі* розробляється алгоритм для реалізації моделі на комп'ютері. На цьому етапі модель представляється у формі, зручній для застосування чисельних методів, і визначається послідовність обчислювальних і логічних операцій для вивчення досліджуваних властивостей об'єкта.

На *третьому етапі* моделювання створюються програми, які переводять модель і алгоритм на мови програми.

Після реалізації трьох етапів математичного моделювання дослідник проводить чисельні експерименти і вносить необхідні корективи в математичну модель. В результаті таких дій модель доводиться до досконалості. Відзначимо, що процес побудови математичної моделі відображає процес пізнання людиною навколишнього світу, тому ідеально підходить для побудови на його основі моделі інформатизації математичної освіти.

Серед основних освітніх вимог до математичної моделі можна виділити такі: її багатопараметричність, можливість графічної тривимірної реалізації, інтерактивність, можливість побудови анімаційних (графічних динамічних) уявлень. СКМ, в першу чергу Maple, надають унікальні програмні і графічні можливості для реалізації цих вимог (Бушкова, 2011).

Унаочнення (візуалізація) математичних структур відіграє важливу роль у вищій освіті, так як засвоєння фундаментальних понять є основою для розуміння процесу математичного моделювання та оволодіння методами комп'ютерного моделювання, що в свою чергу, створює передумови для інноваційного розвитку сучасної технічної освіти.

Як показано в ряді досліджень (Аладьев, Бойко&Ровба, 2011; Бушкова, 2011; Дьяконов, 2006; Голоскоков, 2004; Корнилов, 2007; Матросов, 2001; Самарский&Михайлов, 2005) та ін. для реалізації третього етапу процесу математичного моделювання ідеально підходять прикладні математичні пакети.

Численні дослідження, проведені різними авторами, наприклад, (Игнатьев&Абдулла, 2010; Сачкова, 2013) показують, що серед відомих систем комп'ютерної математики Maple є найбільш прийнятною для математичного моделювання. Відзначається простота інтерфейсу, а також відповідність мови програмування стандартній математичній мові. Зокрема, в дослідженнях, які присвячені порівняльному аналізу СКМ Maple і Mathematica, відзначається що «Maple, підтримуючи досить розвинену процедурну мову програмування, найкращим чином відповідає завданням освітнього характеру і, зокрема, вдосконаленню викладання математично-орієнтованих дисциплін для університетів (Игнатьев&Мифтахов, 2015).

Однією із важливих для системи освіти характеристик Maple є чудова якість тривимірної динамічної графіки, а також прості засоби створення авторських бібліотек процедур. Всі ці якості, разом узяті, безсумнівно, висувають Maple на лідируючу позицію в системі математичної освіти.

ОБГОВОРЕННЯ

Будь яке лінійне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними може бути записане у вигляді

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+D\frac{\partial U}{\partial x}+E\frac{\partial U}{\partial y}+FU+G=0, \quad (1)$$

де A,B,C,D,E,F,G (1) – функції змінних *x* і *y*, які мають неперервні похідні до другого порядку включно. Вважаємо, що A,B і C не перетворюються одночасно в нуль.

Рівнянню (1) відповідає квадратична форма

$$g(x)=AX^2+2BXY+CY^2 \quad (2)$$

визначник якої

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2>0 \Rightarrow A\neq 0 \quad (3)$$

Рівняння (1) у кожному класі можна звести до найпростішого (канонічного) вигляду (таб. 1) через введення нових незалежних змінних.

Таблиця 1

Типи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними

Тип рівняння		Канонічна форма
1.	Еліптичний ($\Delta=AC-B^2>0$)	$U''_{\xi\xi}+U''_{\eta\eta}+\overline{f}\left(\xi,\eta,U'_{\xi},U'_{\eta},U\right)=0$
2.	Гіперболічний ($\Delta=AC-B^2<0$)	$2\overline{B}U''_{\xi\eta}+\overline{f}\left(\xi,\eta,U'_{\xi},U'_{\eta},U\right)=0$
3.	Параболічний ($\Delta=AC-B^2=0$)	$U''_{\eta\eta}+\overline{f}\left(\xi,\eta,U'_{\xi},U'_{\eta},U\right)=0$

Основними етапами зведення до канонічного вигляду лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних є:

1) *вводимо рівняння;*
2) *формуємо матрицю старших коефіцієнтів і обчислюємо її визначник;*
3) *класифікуємо тип рівняння;*
4) *формуємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його;*
5) *вводимо нові змінні і підставляємо їх у дане рівняння;*
6) *після спрощення записуємо канонічну форму рівняння.*

Перетворення диференціальних рівнянь в частинних похідних засобами MAPLE є програмною задачею, яка поєднує використання інструментів пакета з необхідними додатковими алгоритмами: складні і, найчастіше, нетривіальні перетворення проміжних результатів (засновані, наприклад, на дослідженні асимптотичної поведінки функцій);

програмне використання додаткової або спеціальної інформації (наприклад, використання рекурентних співвідношень для деяких спеціальних функцій, які поки недоступні засобами MAPLE) і т.д. Більш того, при вирішенні складних завдань вимагається програмування окремих етапів рішення з наступним об'єднанням проміжних результатів, а також створення комплексів програм (наприклад, при комплексному - аналітичному і чисельному – розв'язуванні рівнянь і різних способах візуалізації і інтерпретації результатів) (Шевченко, 2016).

Для програмування побудови формального розв'язання на мові MAPLE необхідно ввести деяку початкову інформацію (табл. 2) з подальшим виконанням визначених алгоритмічних операцій.

Таблиця 2

Типи інформації при зведенні до канонічного вигляду диференціальних рівнянь в частинних похідних засобами MAPLE

Тип інформації	Зміст
Основна інформація	Виклик пакетів розширення
	Введення диференціального рівняння в частинних похідних
	Виклик різних функцій і операторів
	Виклик засобів аналітичного і числового розв'язку рівнянь.
Додаткова інформація	Представлення функції при введенні нових змінних
	Виконання заміни змінних
	Перевизначення сталих, які за замовчуванням присвоюються пакетом
	Введення математичної інформації
	Введення і виведення інформації, яка пов'язана з поточним контролем виконуваних операцій (отримання результат для відомого окремого випадку, контроль іншими засобами).
	Введення інформації про форму представлення результату.
	Введення інформації для дослідження проміжних і кінцевих результатів.
Робоча інформація	Послідовність виведення одержаних результатів.
	Формати змінних і даних.
	Виведення проміжних результатів.
	Типи змінних.

Зауважимо, що якщо введення і використання основної інформації є добре розробленим алгоритмом для багатьох завдань, що вирішуються в MAPLE, то саме програмування, використання додаткової і робочої інформації, інтерпретація проміжних результатів і їх подальше використання при розв'язуванні рівнянь в частинних похідних є основною програмною задачею.

Програмні засоби MAPLE дають можливість будувати формальні рішення в термінах і позначеннях відомих класичних підходів (Тихонов&Самарский, 1977; Араманович&Левин, 1964; Арсенин, 1966) до розв'язування таких завдань. Можливо, це і не є необхідним моментом, але може виявитися важливим не тільки з методичної точки зору але і з точки зору апробації розроблених методів розв'язування, їх інтерпретації і застосування (Тихоненко, 2007).

На основі визначених алгоритмічних операцій (завдання коефіцієнтів і введення рівняння, використання засобів дослідження, використання засобів перетворення рівняння, виведення канонічної форми рівняння) можна сформувати програмні алгоритми формального зведення диференціальних рівнянь до канонічного вигляду. Звичайно, операції і дії можуть змінюватися в залежності від визначення основного способу зведення.

Подамо функціональні алгоритми зведення до канонічного вигляду рівнянь кожного типу.

Алгоритм 1

Функціональний алгоритм зведення до канонічного вигляду рівняння *гіперболічного* ($\Delta < 0$) типу.

Задаємо коефіцієнти рівняння і саме рівняння

> a:=A,2*B,C,D,E,F,G;

$$a := A, 2\,B, C, \mathrm{D}, E, F, G$$

> equ:=a[1]*diff(u(x,y),x,x)+a[2]*diff(u(x,y),x,y)+a[3]*diff(u(x,y),y,y)+
+ a[4]*diff(u(x,y),x)+a[5]*diff(u(x,y),y)+a[6]*u(x,y)+a[7]=0;

$$equ := A\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,y)\right)+2\,B\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right)+C\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{u}(x,y)\right)+\mathrm{D}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right)+E\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x,y)\right)+F\,\mathrm{u}(x,y)+G=0$$

> eq:=lhs(equ);

$$eq := A\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,y)\right)+2\,B\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right)+C\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{u}(x,y)\right)+\mathrm{D}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right)+E\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x,y)\right)+F\,\mathrm{u}(x,y)+G$$

Формуємо матрицю старших коефіцієнтів і обчислюємо її визначник

> M:=linalg[matrix](2,2,[coeff(eq,diff(u(x,y),x,x)),coeff(eq,diff(u(x,y, x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),y,y))]);

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

> Delta:=(linalg[det](M)); N:=Delta;

$$\Delta := A\,C - B^2$$

$$N := A\,C - B^2$$

Визначаємо тип рівняння

```
> if N>0 then print ("Рівняння еліптичного типу");
> elif N<0 then print ("Рівняння гіперболічного типу");
> else N=0; print ("Рівняння параболічного типу");
> end if;
```

Рівняння гіперболічного типу

Формуємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його

```
> a[1]*Z^2-a[2]*Z+a[3]=0;
```

$$A Z^2 - 2\,B\,Z + C = 0$$

```
> res1:=solve(a[1]*Z^2-a[2]*Z+a[3]=0,Z);
> res2:={seq(dsolve(diff(y(x),x)=res1[i],y(x)),i=1..2)};
> print(`Характеристики`);
> res2:=subs(y(x)=y,res2);{seq(solve(res2[i],_C1),i=1..nops(res2))};
```

Вводимо нові змінні і підставляємо їх у дане рівняння

```
> print(`Заміна змінних`);
> itr:={xi=solve(res2[1],_C1), eta=solve(res2[2],_C1)};
> tr:=solve(itr,{x,y});
> print (`Канонічна форма`);
> PDEtools[dchange](tr,eq,itr,[eta,xi],simplify)=0;
```

Кононічна форма

$$2\overline{\mathrm{B}}\mathrm{U}''_{\xi\eta} + \overline{f}\left(\xi,\eta,\mathrm{U}'_{\xi},\mathrm{U}'_{\eta},\mathrm{U}\right) = 0$$

<u>Алгоритм 2</u>

Функціональний алгоритм зведення до канонічного вигляду рівняння <u>*еліптичного*</u>($\Delta > 0$) типу.

Задаємо коефіцієнти рівняння і саме рівняння

```
> a:=A,2*B,C,D,E,F,G;
```

$$a := A, 2\,B, C, \mathrm{D}, E, F, G$$

```
> equ:=a[1]*diff(u(x,y),x,x)+a[2]*diff(u(x,y),x,y)+a[3]*diff(u(x,y),y,y)+
+ a[4]*diff(u(x,y),x)+a[5]*diff(u(x,y),y)+a[6]*u(x,y)+a[7]=0;
```

$$equ := A\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,y)\right) + 2\,B\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right) + C\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{u}(x,y)\right) + \mathrm{D}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right) + E\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x,y)\right) + F\,\mathrm{u}(x,y) + G = 0$$

```
> eq:=lhs(equ);
```

$$eq := A\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,y)\right) + 2\,B\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right) + C\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{u}(x,y)\right) + \mathrm{D}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right) + E\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x,y)\right) + F\,\mathrm{u}(x,y) + G$$

Формуємо матрицю старших коефіцієнтів і обчислюємо її визначник

```
> M:=linalg[matrix](2,2,[coeff(eq,diff(u(x,y),x,x)),coeff(eq,diff(u(x,y,
x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),y,y))]
```

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

```
> Delta:=(linalg[det](M)); N:=Delta;
```

$$\Delta := A\,C - B^2$$
$$N := A\,C - B^2$$

Визначаємо тип рівняння

```
> if N>0 then print ("Рівняння еліптичного типу");
> elif N<0 then print ("Рівняння гіперболічного типу");
> else N=0; print ("Рівняння параболічного типу");
> end if;
```

Рівняння еліптичного типу

Формуємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його

```
> a[1]*Z^2-a[2]*Z+a[3]=0;
```

$$A Z^2 - 2\,B\,Z + C = 0$$

```
> res1:=solve(a[1]*Z^2-a[2]*Z+a[3]=0,Z);
> res2:={seq(dsolve(diff(y(x),x)=res1[i],y(x)),i=1..2)};
> print(`Характеристики`);
> res2:=subs(y(x)=y,res2);{seq(solve(res2[i],_C1),i=1..nops(res2))};
```

Вводимо нові змінні і підставляємо їх у дане рівняння

```
> print(`Заміна змінних`);
> itr:={xi=coeff(%[1],I), eta=%[1]-coeff(%[1],I)*I};
> tr:=solve(itr,{x,y});
> print (`Канонічна форма`);
> PDEtools[dchange](tr,eq,itr,[eta,xi],simplify)=0;
```

Кононічна форма

$$\mathrm{U}''_{\xi\xi} + \mathrm{U}''_{\eta\eta} + \overline{f}\left(\xi,\eta,\mathrm{U}'_{\xi},\mathrm{U}'_{\eta},\mathrm{U}\right) = 0$$

Алгоритм 3

Функціональний алгоритм зведення до канонічного вигляду рівняння *параболічного* ($\Delta = 0$) типу.

Задаємо коефіцієнти рівняння і саме рівняння

> a:=A,2*B,C,D,E,F,G;

$$a := A, 2\,B, C, \mathrm{D}, E, F, G$$

> equ:=a[1]*diff(u(x,y),x,x)+a[2]*diff(u(x,y),x,y)+a[3]*diff(u(x,y),y,y)+
+ a[4]*diff(u(x,y),x)+a[5]*diff(u(x,y),y)+a[6]*u(x,y)+a[7]=0;

$$equ := A\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,y)\right) + 2\,B\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right) + C\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{u}(x,y)\right) + \mathrm{D}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right) + E\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x,y)\right) + F\,\mathrm{u}(x,y) + G = 0$$

> eq:=lhs(equ);

$$eq := A\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,y)\right) + 2\,B\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right) + C\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{u}(x,y)\right) + \mathrm{D}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right) + E\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x,y)\right) + F\,\mathrm{u}(x,y) + G$$

Формуємо матрицю старших коефіцієнтів і обчислюємо її визначник

> M:=linalg[matrix](2,2,[coeff(eq,diff(u(x,y),x,x)),coeff(eq,diff(u(x,y, x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),y,y))]);

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

> Delta:=(linalg[det](M)); N:=Delta;

$$\Delta := A\,C - B^2$$

$$N := A\,C - B^2$$

Визначаємо тип рівняння

> if N>0 then print ("Рівняння еліптичного типу");

> elif N<0 then print ("Рівняння гіперболічного типу");

> else N=0; print ("Рівняння параболічного типу");

> end if;

Рівняння параболічного типу

Формуємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його

> a[1]*Z^2-a[2]*Z+a[3]=0;

$$A\,Z^2 - 2\,B\,Z + C = 0$$

> res1:=solve(a[1]*Z^2-a[2]*Z+a[3]=0,Z);

> subs(y=y(x),res1[1]);res2:=dsolve(diff(y(x),x)=%,y(x));

> print(\`Характеристики\`); res2:=subs(y(x)=y,res2);>

Вводимо нові змінні і підставляємо їх у дане рівняння

> print(\`Заміна змінних\`);

> itr:={xi=solve(res2,_C1),eta=y};

> tr:=solve(itr,{x,y});

> print (\`Канонічна форма\`);

> PDEtools[dchange](tr,eq,itr,[eta,xi],simplify)=0;

Кононічна форма

$$\mathrm{U}''_{\eta\eta} + \overline{f}\left(\xi,\eta,\mathrm{U}'_{\xi},\mathrm{U}'_{\eta},\mathrm{U}\right) = 0$$

Наведені функціональні алгоритми є:

- ✓ наочними;
- ✓ відображають всі основні властивості досліджуваної моделі;
- ✓ інтерактивні, тобто, дозволяють користувачеві маніпулювати ними за допомогою зовнішніх пристроїв;
- ✓ багатопараметричними для забезпечення можливості проведення чисельних експериментів.

Зауважимо, що багатопараметричність створюваних комп'ютерних моделей є найважливішим фактором, який дозволяє управляти математичною моделлю, тобто, проводити комп'ютерне моделювання.

Створенні функціональні комп'ютерні моделі можуть використовуватись, як викладачами, так і студентами через виклик відповідних бібліотек в яких містяться багатопараметричні команди, що мають простий синтаксис.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Створені алгоритми зручні і прості в роботі, вони будуть корисними для студентів нематематичних факультетів. Вони можуть використовуватись і викладачами для перевірки робіт студентів, а також для генерування завдань.

Представлений матеріал дозволить поглибити теоретичні знання та на початковому етапі навчання в університеті отримати певні навички математичного моделювання, що є необхідним для вивчення спеціальних дисциплін, сприятиме підвищенню рівня підготовки майбутніх фахівців.

Впровадження СКМ у процес навчання є необхідністю, що підтверджується дієвістю таких продуктів. Подальшого обґрунтування потребує розроблення методичних рекомендацій щодо використання і складання функціональних алгоритмів для формування і засвоєння базових понять вищої математики в технічних вузах.

Список використаних джерел

1. Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А. Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект. Гродно: Изд–во Гродненского госуниверситета, 2011, 518 с.

2. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1964.
3. Арсенин В.Я. Математическая физика. Москва: Наука, 1966.
4. Баганов Є. О. Методи розрахунків на ЕОМ: *навчальний посібник для студентів напряму 090500 «Енергетика»*. Херсон: ХНТУ, 2008. 270 с.
5. Бушкова В.А. Библиотека программных процедур создания управляемой оснащенной динамической визуализации геодезических линий в СКМ Maple. *Вестник ТГГПУ*. 2011. №4(26). С. 8–10.
6. Бушкова О. А. Design of the Computer Geometry Resource in «Mathematica» Environment. Open Educartion. 2011. №6, С.18-22
7. Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: учебник для вузов. Питер, 2004. 539 с.
8. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10/11 в математике, физике и образовании. Москва: ДМК Пресс, СОЛОН -ПРЕСС, 2011. 752 с.
9. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. Москва: Солон- Пресс. 2006. 720 с.
10. Игнатьев Ю.Г., Мифтахов Р.Ф. Информационные технологии в математическом образовании: учебное пособие. Казань: Казанский университет, 2015. 264 с.
11. Игнатьев Ю. Г., Абдулла Х. Х. Математическое моделирование нелинейных обобщенно - механических систем в системе компьютерной математики Maple. *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2010. №2 (14). С. 67 – 77.
12. Корнилов В. С. Modern information and communication technologies in humanitarian studies mathematical models of inverse problems for differential equations. Vestnik PFUR: Informatization of Education. 2007. № 1. С. 64-98.
13. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПБ.: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
14. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. Москва: Физматлит, 2005. 320 с.
15. Сачкова О. А. Динамическая визуализация решения диференциальных уравнений при преподавании высшей математики. URL: https://cyberleninka.ru/article/v/dinamicheskaya-vizualizatsiya-resheniya-differentsialnyh-uravneniy-pri-prepodavanii-vysshey-matematiki (Дата обращения 10.01.2019).
16. Сачкова О. А. Динамические модели дифференциальных уравнений в учебном процессе. Тезисы докладов XIII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения». Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2012. Вып. 12. С. 47-49.
17. Сдвижков О. А. Математика на компьютере: Maple 8. – Москва: СОЛОН - Пресс, 2003. 176с.
18. Тихоненко А. В. Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом функционального программирования в MAPLE. URL: http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/MFTI/2007/046.pdf (Дата обращения 12.01.2019).
19. Тихонов А. Н., Самарский А., А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977.
20. Шевченко А. С. Использование математического пакета Maple при проведении лабораторных работ по курсу «Численные методы». *Молодой ученый*. 2015. №9. С. 1222 - 1225.
21. Шевченко А. С. Использование систем компьютерной алгебры в учебном процессе. *Научно-методический электронный журнал «Концепт»*. 2016. Т. 15. С. 206–210. URL: http://e-koncept.ru/2016/86942.htm (Дата обращения 15.12.2018)
22. Шевченко А. С. Применение математического пакета Maple к решению вариационных задач. *Молодой ученый*. 2015. №22. С. 33 - 37.

References

1. Alad'e, V. Z., Bojko, V. K. & Rovba E. A. (2011). Programmirovanie v paketah Maple i Mathematica: Sravnitel'nyj aspekt [Programming in packages Maple and Mathematica: Comparative aspect]. Grodno: Izd–vo Grodnenskogo gosuniversiteta [in Russian].
2. Aramanovich, I. G. & Levin, V. I. (1964). Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. Moskva: Nauka [in Russian].
3. Arsenin, V. Ja. (1966). Matematicheskaja fizika [Mathematical physics]. Moskva: Nauka [in Russian].
4. Bahanov, Ye. O. (2008). Metody rozrakhunkiv na EOM: navchalnyi posibnyk dlia studentiv napriamu 090500 «Enerhetyka» [Methods of calculations on a computer: a manual for students directly 090500 «Power engineering»]. Kherson: KhNTU [in Ukraine].
5. Bushkova, V. A. (2011). Biblioteka programmnyh procedur sozdanija upravljaemoj osnashhennoj dinamicheskoj vizualizacii geodezicheskih linij v SKM Maple [Library of software procedures for creating a controlled, equipped dynamic visualization of geodetic lines in SCM Maple]. Vestnik TGGPU Nauka - Bulletin of TGGPU,4(26), 8-10 [in Russian].
6. Bushkova, V. A. (2011). Design of the Computer Geometry Resource in «Mathematica» Environment. Open Educartion, 6, 18-22.
7. Goloskokov, D. P. (2004). Uravnenija matematicheskoj fiziki. Reshenie zadach v sisteme Maple: uchebnik dlja vuzov [Equations of mathematical physics. Problem solving in the Maple system: a textbook for universities]. Piter [in Russian].
8. D'jakonov, V. P. (2011). Maple 9.5/10/11 v matematike, fizike i obrazovanii [Maple 9.5 / 10/11 in mathematics, physics and education]. Moskva: DMK Press, SOLON –PRESS [in Russian].
9. D'jakonov, V. P. (2006). Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii [Maple 9.5/10 in mathematics, physics and education]. Moskva: DMK Press, SOLON –PRESS [in Russian].
10. Ignat'ev, Ju. G. & Miftahov, R. F. (2015). Informacionnye tehnologii v matematicheskom obrazovanii: uchebnoe posobie [Information technology in mathematics education: a tutorial]. Kazan': Kazanskij universitet [in Russian].
11. Ignat'ev, Ju. G. & Abdulla, H. H. (2010). Matematicheskoe modelirovanie nelinejnyh obobshhenno - mehanicheskih sistem v sisteme komp'juternoj matematiki Maple. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij [Mathematical modeling of nonlinear

generalized - mechanical systems in the system of computer mathematics Maple]. Povolzhskij region. Fiziko-matematicheskie nauki - Volga region. Physics and Mathematics , 2 (14), 67 – 77 [in Russian].

12. Kornilov, V. S. (2007). Modern information and communication technologies in humanitarian studies mathematical models of inverse problems for differential equations. Vestnik PFUR: Informatization of Education, 1, 64-98.
13. Matrosov, A. V. (2001). Maple 6. Reshenie zadach vysshej matematiki i mehaniki [Solving problems of higher mathematics and mechanics]. SPB.: BHV-Peterburg [in Russian].
14. Samarskij, A. A. & Mihajlov, A. P. (2005). Matematicheskoe modelirovanie [Math modeling]: Idei. Metody. Primery. 2-e izd., ispr. Moskva: Fizmatlit [in Russian].
15. Sachkova, O. A. Dinamicheskaja vizualizacija reshenija diferencial'nyh uravnenij pri prepodavanii vysshej matematiki [Dynamic visualization of solving differential equations when teaching higher mathematics]. Retrieved from https://cyberleninka.ru/article/v/dinamicheskaya-vizualizatsiya-resheniya-differentsialnyh-uravneniy-prirepodavanii-vysshey-matematiki [in Russian].
16. Sachkova, O. A. (2012). Dinamicheskie modeli differencial'nyh uravnenij v uchebnom processe [Dynamic models of differential equations in the educational process]. Tezisy dokladov HIII mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Sistemy komp'juternoj matematiki i ih prilozhenija»- Abstracts of the XIII International Scientific Conference "Systems of Computer Mathematics and Their Applications" (pp. 47-49). Smolensk: Izd-vo SmolGU [in Russian].
17. Sdvizhkov, O. A. (2003). Matematika na komp'jutere: Maple 8 [Mathematics on the computer: Maple 8]. Moskva: SOLON – Press [in Russian].
18. Tihonenko, A. V. Reshenie differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh metodom funkcional'nogo programmirovanija v MAPLE [Solving partial differential equations using functional programming in MAPLE]. Retrieved from: http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/MFTI/2007/046.pdf [in Russian].
19. Tihonov, A. N. & Samarskij, A. A. (1977.) Uravnenija matematicheskoj fiziki. Moskva: Nauka [in Russian].
20. Shevchenko A. S. (2015). Ispol'zovanie matematicheskogo paketa Maple pri provedenii laboratornyh rabot po kursu «Chislennye metody» [The use of the mathematical package Maple during laboratory work on the course "Numerical Methods"]. Molodoj uchenyj - Young scientist, 9, 1222 - 1225.
21. Shevchenko, A. S. (2016). Ispol'zovanie sistem komp'juternoj algebry v uchebnom processe [The use of computer algebra systems in the educational process]. Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal «Koncept» - Scientific and methodical electronic journal "Concept", Vol. 15, 206–210 [in Russian]. Retrieved from: http://e-koncept.ru/2016/86942.htm [in Russian].
22. Shevchenko, A. S. (2015). Primenenie matematicheskogo paketa Maple k resheniju variacionnyh zadach [Application of the mathematical package Maple to solving variational problems.]. Molodoj uchenyj - Young scientist, 22, 33 – 37 [in Russian].

MODELING THE MATHEMATICAL PHYSICS PROBLEM IN THE COMPUTER MATHEMATICS SYSTEM MAPLE

M.B. Kovalchuk

Vinnytsia National Technical University, Ukraine

Abstract.

Formulating the problem. *Higher mathematics is traditionally considered one of the most difficult subjects in technical universities. It integrates knowledge from courses of algebra, analytic geometry, mathematical analysis of one and several variables, differential equations. Studying the methods of solving and reviewing examples of the application of differential equations is the propedevity of modeling and forecasting. Some computational procedures that accompany this process are complicated and cumbersome, therefore, the use of computer mathematics systems, in particular (SCM) Maple, is a powerful means of universalization and integration of educational and mathematical activities.*

Materials and methods of research. *The research material is the process of solving differential equations in partial derivatives by means of MAPLE. The purpose of using observation, analysis and systematization was the accumulation of information on the expediency of use (SCM) Maple in the formation of the concepts of higher mathematics. Maple's Empirical Analysis of Program Procedures (SCM) Maple and the modeling method were used to create and use functional algorithms in the theory of differential equations and visualization of results.*

Results*. In the article the content of the concept "mathematical model" is analyzed and the scheme of its creation is presented. The main stages of mathematical modeling are distinguished and the sequence of computational and logical operations is determined for studying the investigated properties of the object. The main types of information and program procedures for building a mathematical model through the application of the system of computer mathematics (SCM) Maple are considered. Several functional algorithms for the construction of linear second-order differential equations with two independent variables to the canonical form are proposed by means of Maple.*

Conclusions. *Summarizing the results of the study it can be argued that the above models allow to deepen theoretical knowledge and at the initial stage of studying at the university, to acquire certain skills of mathematical modeling, which is necessary for the study of special disciplines and help to increase the level of training of future specialists.*

Key words: *equations of mathematical physics, systems of computer mathematics, functional algorithms, mathematical modeling.*