



*Здешиц В.М., Здешиц А.В., Черних А.М. Розробка та методичний супровід фронтальної лабораторної роботи з фізики "Петльовий маятник". Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 1(23). Частина 2. С. 31-38.*

*Zdeshchyts V., Zdeshchyts A., Chernych A. Development and methodological support of frontal laboratory work in physics "The looping pendulum". Physical and Mathematical Education. 2020. Issue 1(23). Part 2. P. 31-38.*

DOI 10.31110/2413-1571-2020-023-1-2-005  
 УДК 378.147: 37.091.64

**В.М. Здешиц**  
 Криворізький державний педагогічний університет, Україна  
 valeriy.zdeschits@kdpu.edu.ua  
 ORCID: 0000-0002-2404-8979

**А.В. Здешиц**  
 НДГПІ Криворізького національного університету, Україна  
 bodehita@gmail.com

**А.М. Черних**  
 Криворізький державний педагогічний університет, Україна  
 Anastasiya2002g@gmail.com

## РОЗРОБКА ТА МЕТОДИЧНИЙ СУПРОВІД ФРОНТАЛЬНОЇ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ З ФІЗИКИ "ПЕТЛЬОВИЙ МАЯТНИК"

### АНОТАЦІЯ

*Розроблена методика проведення фронтальної лабораторної роботи з фізики, яка використовує мініатюрні пристрої та смартфони для визначення коефіцієнта тертя ковзання гнучкого тіла по нерухомому циліндру та кінематичних параметрів петльового маятника.*

**Формулювання проблеми.** *Розв'язання Ейлером задачі щодо ковзання гнучкого тіла по нерухомому циліндру розглядається при викладанні фізики як класичний приклад вирішення завдань механіки аналітичним методом, але відсутність практичного підтвердження теоретичних висновків значно знижує якість набутих студентами знань.*

**Матеріали і методи.** *Робота має теоретичний та прикладний характер. Поставлена проблема вирішувалася за допомогою розроблених мініатюрних дослідницьких установок, що використовували теоретичну основу задачі Ейлера. Методологічно дослідження базувалися на відомих законах кінематики та збереження енергії, а її основні науково-практичні результати отримані з використанням відео- та фотореєстрації, цифрових технологій оброблення результатів експериментів.*

**Результати.** *Основним результатом роботи є розроблення мініатюрної дослідницької установки "Петльовий маятник" та методики її використання для фронтального проведення лабораторних робіт "Визначення коефіцієнта тертя гнучких тіл при ковзанні по циліндру" і "Петльовий математичний маятник зі змінною довжиною нитки" на уроках фізики. Важливим є те, що для реєстрації кінематичних параметрів руху використовуються смартфони в режимі відео "slow motion" та "секундомір". Це розв'язує проблему забезпечення закладів освіти сучасним лабораторним обладнанням. Крім того, розширюються межі навчального процесу: студенти можуть отримати доступ до лабораторних установок у комфортний для них та викладача час.*

**Висновки.** *Доведено, що розроблені мініатюрні установки надають можливість фронтального проведення лабораторних робіт з використанням формули Ейлера. Студенти при проведенні експериментів визначають величину коефіцієнта тертя при ковзанні гнучких тіл по нерухомому циліндру та знайомляться з законом тертя гнучких тіл, який відрізняється від закону тертя ковзання твердих тіл по плоскій поверхні. Цей висновок власне й пропонується підтвердити студентам за допомогою експериментальної установки, де теоретично отримані залежності повністю узгоджуються з результатами експериментів.*

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** *фізичний експеримент, лабораторні роботи, петльовий маятник, формула Ейлера.*

### ВСТУП

**Постановка проблеми.** Розв'язання Ейлером задачі щодо ковзання гнучкого тіла по нерухомому циліндру розглядається при викладанні фізики як класичний приклад розв'язування завдань механіки аналітичним методом. Це питання розглядається, наприклад, у книзі (Тарг, 2010, с. 69), яка видавалася більше 20-ти разів. Хоча розв'язок задачі існує вже 255 років, але увага до цього питання не слабшає, що підтверджують демонстрації в YouTube "петльового маятника" – математичного маятника зі змінною довжиною нитки (<https://www.youtube.com/watch>). І якщо раніше це завдання

розглядалося при вивченні дисципліни "Теоретична механіка" (Литвинов, Михайлович, Бойко, Березовий, 2013, с.225), то тепер цією проблемою цікавляться вже школярі на фізичних олімпіадах (<https://ppt-online.org/463856>).

Розв'язок цього завдання може бути використано як теоретичну основу для розроблення мініатюрної дослідницької установки, яка дозволить проводити на уроках фізики лабораторну роботу "Визначення коефіцієнта тертя гнучких тіл при ковзанні по циліндру" і "Петльовий математичний маятник зі змінною довжиною нитки" фронтально. Важливо, що на одній і тій же установці вирішуються два тематичні завдання. Під час виконання першої лабораторної роботи студенти експериментально визначають величину коефіцієнта тертя при ковзанні гнучких тіл по нерухомому циліндру та знайомляться з законом тертя гнучких тіл, який відрізняється від закону тертя ковзання твердих тіл по плоскій поверхні. Цей висновок власне й пропонується підтвердити студентам. Виконання другої лабораторної роботи дозволяє дослідити кінематичні параметри петльового математичного маятника зі змінною довжиною нитки, складовою частиною якого є оборотний маятник.

Постановка завдання №1 (рис. 1а): якщо з'єднати легкий і важкий вантажі невагомою ниткою та перекинути її через горизонтальний нерухомий циліндр, опустивши вниз вантажі, то після звільнення легкий вантаж почне рухатися вгору, а важкий – вниз з прискоренням  $a$ . Процес руху тягарців можна зареєструвати використовуючи смартфон на відео в уповільненому режимі разом з показаннями секундоміра і, після відповідного оброблення, визначити кінематичні параметри процесу руху, коефіцієнт тертя та інші параметри.

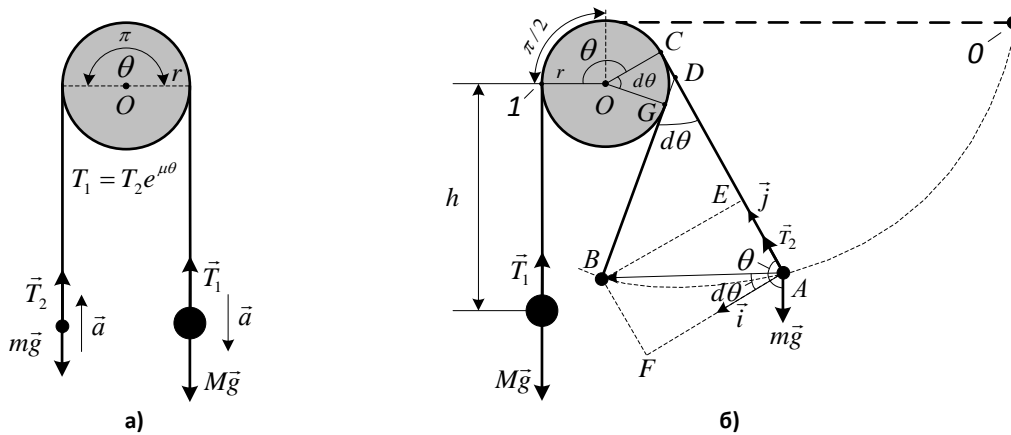


Рис. 1. Розрахункова схема

Постановка завдання №2 (рис. 1б): якщо з'єднати легкий і важкий вантажі невагомою ниткою та перекинути її через горизонтальний нерухомий циліндр, опустивши вниз важкий вантаж, а легкий, відвівши на деякий кут, відпустити, то після звільнення вантажів легкий вантаж почне обертатися навколо циліндра й незабаром зупинить падіння важкого вантажу. Мета досліджень полягає в тому, щоб зрозуміти, чому маленький вантаж, обертаючись навколо циліндра, при своєму падінні, зупиняє більш важкий тягар і які параметри обертання маленького вантажу як оборотного маятника.

**Аналіз актуальних досліджень.** При вивченні реально діючих сил у динаміці основна увага серед інших приділяється силі тертя при ковзанні та коченні твердих тіл по плоскій поверхні. Дослідження ковзання гнучких тіл по нерухомому циліндру та знайомство з законом тертя гнучких тіл найчастіше не проводиться. Однак, у машинобудуванні, техніці, наукових дослідженнях закон тертя гнучких тіл Ейлера широко використовується. Наприклад, формула Ейлера застосовується при вирішенні проблеми передачі тягового зусилля конвеєрній стрічці, ремінним приводам верстатів, підйомних машин (Лубенець, 2008). Теоретичні дослідження феномену петльового маятника також ґрунтуються на формулі Ейлера. Найяскравішим підтвердження цього є опублікована в European Journal of Physics у лютому 2020 р. робота (Zhou Yu-bo et al., 2020).

Основною перешкодою для вивчення закону тертя гнучких тіл є відсутність експериментальних установок у фізичних лабораторіях. Методика проведення таких лабораторних робіт фронтально також відсутня.

**Мета статті.** З огляду на ці невирішені питання метою статті є висвітлення методики проведення фронтальних лабораторних робіт з фізики, яка, використовуючи розроблені мініатюрні пристрої та смартфони, дає змогу визначити коефіцієнти тертя ковзання гнучких тіл по нерухомому циліндру та кінематичні параметри петльового маятника.

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ**

У задачі №1 на кожен вантаж діє сила натягу з боку нитки й сила тяжіння. Величина сил натягу на вантажі різна, оскільки між ниткою і циліндром є тертя. Натяг нитки по обидва боки циліндра пов'язані формулою Ейлера:

$$T_1 = T_2 e^{\mu\theta}. \tag{1}$$

У відповідності з другим законом Ньютона, з урахуванням того, що стартовий кут  $\theta = \pi$  :

$$Ma = Mg - T_1 = Mg - Te^{\mu\pi}, \tag{2}$$

$$ma = T_2 - mg. \tag{3}$$

Тоді прискорення вантажу з більшою масою буде визначатися формулою:

$$a = \frac{d^2h}{dt^2} = g \frac{M - me^{\mu\pi}}{M + me^{\mu\pi}} = g \frac{\gamma - e^{\mu\pi}}{\gamma + e^{\mu\pi}},$$

а величина коефіцієнта тертя ковзання:

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln \left[ \frac{M(g-a)}{m(g+a)} \right] = \frac{1}{\pi} \ln \left[ \gamma \cdot \frac{g-a}{g+a} \right]. \quad (4)$$

Як бачимо, закон тертя гнучких тіл відрізняється від закону тертя ковзання твердих тіл по плоскій поверхні. Цей висновок власне й пропонується підтвердити студентам на експериментальній установці. Якщо вимірювання проводити, коли прискорення  $a = 0$ , але вантажі при найменшому поштовху починають рух, то коефіцієнт тертя

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln \left[ \frac{M}{m} \right] = \frac{1}{\pi} \ln \gamma, \quad (5)$$

у разі  $\theta = \pi$  рад, а в разі  $\theta = 3\pi$  рад коефіцієнт тертя

$$\mu = \frac{1}{3\pi} \ln \left[ \frac{M}{m} \right] = \frac{1}{3\pi} \ln \gamma. \quad (6)$$

Отже, вимірюючи відношення мас тягарців  $M/m = \gamma$ , при якому починається рух, експериментально можна визначити коефіцієнт тертя  $\mu$ .

Тепер будемо розв'язувати завдання №2, використовуючи схему установки, зображеної на рис. 1б. Рух легкого вантажу можна поділити на дві стадії: 1) обертання навколо циліндра до зупинки важкого вантажу, і 2) обертання після його зупинки. Проведемо теоретичний аналіз першої стадії, згідно (Zhou Yu-bo et al., 2020). На розрахунковій схемі рис. 1б початок декартових координат знаходиться в центрі циліндра  $O$ , радіус якого  $r$ . Вісь  $X$  направимо по горизонталі праворуч, вісь  $Y$  – униз. Важкий вантаж  $M$  зв'язаний з легким вантажем  $m$  ниткою довжиною  $L$ . Припустимо, що в момент часу  $t$  легкий вантаж знаходиться в точці  $A$ , як показано на рис. 1б. У цій точці розміщуємо додаткову систему координат, орти  $\vec{i}$  і  $\vec{j}$  якої орієнтовані так, як наведено на рис. 1б. Вантаж  $M$  за цей час пройшов шлях  $h$ , а нитка, що утримує вантаж  $m$ , контактує з циліндром у точці  $C$ . Довжина нитки, яка контактує з поверхнею циліндра, дорівнює  $\theta \cdot r$ . За короткий час  $dt$  легкий вантаж  $m$  зміщується в точку  $B$ , а точка дотику нитки  $C$  – у точку  $G$ . Тобто, точка дотику подолає кутовий шлях  $d\theta$ , а вантаж  $M$  впаде на відстань  $dh$ .

Отже, миттєва швидкість зміщення вантажу  $m$ :  $\vec{v} = \frac{d\vec{AB}}{dt} = \frac{dAF}{dt} \vec{i} + \frac{dAE}{dt} \vec{j}$ . Як видно з рис. 1б,  $AC = L - \theta r - h$ ,  $BG = (L - \theta r - h) - (dh + rd\theta)$ ,  $CD = GD = r \operatorname{tg}(\theta/2)$ . Зміна кута  $d\theta$  така мала, що можна вважати  $DB \perp AB$ . Тому  $AF = (BG + GD) \sin(d\theta)$ ,  $AE = AC - CD - BD \cos(d\theta)$ . Урахувавши, що  $d\theta = \sin(d\theta) = 2 \operatorname{tg}(d\theta/2)$ ,  $\cos(d\theta) = 1$ , отримуємо  $AF = (L - \theta r - h) d\theta$  та  $AE = dh$ . Отже, миттєва швидкість легкого вантажу в точці  $A$  буде дорівнювати:

$$\frac{d\vec{AB}}{dt} = (L - \theta r - h) \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \frac{dh}{dt} \vec{j} \quad (7)$$

Прискорення в точці  $A$  буде дорівнювати:

$$\vec{a}_A = \left[ -2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dh}{dt} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + (L - \theta r - h) \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \vec{i} + \left[ (L - \theta r - h) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{d^2h}{dt^2} \right] \vec{j}. \quad (8)$$

Запишемо другий закон Ньютона для важкого вантажу  $M$  вздовж осі  $Y$ :

$$Mg - T_1 = M \frac{d^2h}{dt^2}, \quad (9)$$

а для легкого вантажу  $m$  у двох взаємно перпендикулярних напрямках уздовж  $\vec{j}$  та  $\vec{i}$  так:

$$T_2 - mg \sin \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) = m \left[ (L - \theta r - h) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{d^2h}{dt^2} \right] \quad (10)$$

$$mg \cos \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) = m \left[ -2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dh}{dt} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + (L - \theta r - h) \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \quad (11)$$

З формули Ейлера  $T_1 = T_2 e^{\mu\theta}$  та рівнянь (9), (11) отримуємо прискорення більш важкого вантажу:

$$a_M = \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{Mg + me^{\mu\theta} \left[ g \cos \theta - (L - \theta r - h) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]}{M + me^{\mu\theta}} = \frac{\gamma g + e^{\mu\theta} \left[ g \cos \theta - (L - \theta r - h) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]}{\gamma + e^{\mu\theta}}. \quad (12)$$

та кутове прискорення легкого вантажу  $m$ :

$$\varepsilon = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\left[ g \sin \theta + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dh}{dt} + r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]}{L - \theta r - h}. \quad (13)$$

Проаналізуємо другу стадію руху. Важок  $M$  зупинився, пройшовши відстань  $h_0$ . Довжина нитки, яка намотана на циліндр, дорівнює  $\theta_0 r$ . Кутова швидкість вантажу  $m$  на цей час дорівнює  $d\theta/dt = \omega_0$ . Довжина нитки від вантажу  $m$  до точки дотику до циліндра  $l_0 = L - h_0 - \theta_0 r$ . Значення  $h_0, \theta_0, \omega_0$  отримуємо, розв'язавши рівняння (12) та (13).

Щоб уникнути плутанини з аналізом руху на першому етапі, ми додаємо індекс 1 до кожної фізичної величини на другій стадії. Тобто  $BG$  змінюється на  $B_1G_1 = (L - h_0 - \theta r) - rd\theta$ , значення інших величин ( $A_1C_1$ ,  $A_1D_1$ , та ін.) узгоджуються з аналізом для першого етапу. Опускаючи величини другого порядку малості, ми можемо отримати  $A_1F_1 = (L - h_0 - \theta r)d\theta - rd\theta$ ,  $l_0 = L - h_0 - \theta r$  та  $A_1E_1 = 0$ . Отже, миттєва швидкість вантажу  $m$  у точці  $A$  є:

$$\frac{A_1\vec{B}_1}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}. \quad (14)$$

а прискорення легкого вантажу в точці  $A$  можна обчислити як [8]:

$$\vec{a}_{A_1} = \left[ -r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \vec{i} + \left[ l \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{j}. \quad (15)$$

Компоненти сили для вантажу  $m$  вздовж напрямку нитки та перпендикулярно їй (рис. 16) записуємо як:

$$T + mg \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = ml \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (16)$$

$$mg \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = m \left[ -r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \frac{d^2\theta}{dt^2} \right], \quad (17)$$

де  $T$  – сила тяги. Спростивши рівняння (16) та (17), отримуємо наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-g \sin\theta + r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2}{l} \quad (18)$$

і

$$T = m \left[ -g \cos\theta + l \frac{d^2\theta}{dt^2} \right]. \quad (19)$$

Якщо припустити, що відстань між легким вантажем і центром циліндра є  $S(\theta)$ , тоді:

$$S^2(\theta) = l^2 + r^2. \quad (20)$$

З рівняння (20) випливає, що, як тільки значення  $l_0$  і  $\theta_0$  стають відомими (значення радіуса циліндра  $r$  відомо), тоді траєкторія легкого вантажу на другій стадії руху легко визначається. Крім цього, кутова швидкість  $\omega_0$  легкого вантажу на початку другого етапу буде визначати тривалість його обертання.

## МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Робота має теоретичний та прикладний характер. Поставлена проблема вирішувалася за допомогою розроблених мініатюрних дослідницьких установок, що використовували теоретичну основу задачі Ейлера. Методологічно робота базувалася на відомих законах кінематики та збереження енергії, а її основні науково-практичні результати отримані з використанням відеореєстрації та цифрових технологій оброблення результатів експериментів.

## РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для демонстрації явища та дослідження характеристик петльового маятника й підтвердження зроблених раніше теоретичних висновків було виготовлено установки, фото яких наведено на рис. 2.



а)



б)

Рис. 2. Фото: а) демонстраційний стенд, б) дослідницька установка

Установка на рис. 2а розроблялася як демонстраційний стенд для вчителя, а зображена на рис. 2б – для фронтального проведення лабораторної роботи студентами. Установка кріпиться до торця дошки столу пружинними

затискачами (binder clips). Рух тягарців відбувається на тлі сантиметрової лінійки, прикріпленої до тумби стола та секундоміра іншого смартфона (точність вимірювання часу 0,001с). Для вимірювання та визначення кінематичних параметрів використовувався смартфон Huawei P20 Pro в режимі відео "slow motion" з частотою до 960 кадрів / с.

Циліндр стенда вчителя діаметром  $D = 30,4$  мм, навколо якого обертався тягарець петльового маятника, кріпився співвісно круговому транспортеру  $\varnothing 350$  мм. Пластмасовий циліндр дослідних установок (частина корпусу шприця) мав діаметр  $D = 21,5$  мм і кріпився по центру кругового транспортера  $\varnothing 90$  мм. Довжина нитки, яка з'єднувала тягарці в наших дослідах, дорівнювала  $L = 0,79$  м. Тягарцем маятника служила пластмасова намистина  $\varnothing 15,7$  мм масою  $m = 2,6$  г. Як інший більш важкий вантаж використовувався корпус пластмасового яйця масою  $M_0 = 3,95$  г, у порожнину якого наливалася при необхідності вода. Маса вантажів вимірювалася електронними вагами. Спочатку було визначено коефіцієнт тертя нитки  $\mu$  об нерухомий циліндр. Для цього порожній корпус тягарця заповнювався водою до моменту початку його руху ( $a = 0$ ). Далі маса  $M$  циліндра з водою вимірювалася на вагах з точністю не гірше 0,01 г і за формулою (4) визначалася величина коефіцієнта тертя  $\mu$  (табл. 1).

Таблиця 1

Результати вимірювання коефіцієнта тертя нитки  $\mu$  об циліндр

$D, \text{мм}$	$\theta, \text{рад}$	$m, \text{г}$	$M, \text{г}$	$M / m$	$\mu$
30,4	$\pi$	2,6	6	2,69	0,266
	$3\pi$	2,6	32	12,3	0,266

Середнє значення коефіцієнта тертя за результатами численних експериментів склало величину  $\mu = 0,266$ .

Для порівняння було визначено величину цього ж коефіцієнта при вертикальному русі тягарців з прискоренням  $a = 5,6$  м/с. Результати вимірювання відображено на рис. 3 і в табл. 2.

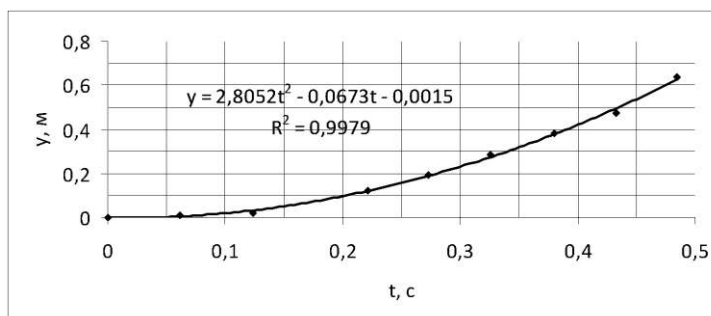


Рис. 3. Графік залежності координати  $y$  від часу падіння вантажу  $M$

Таблиця 2

Результати вимірювання коефіцієнта тертя нитки об циліндр при русі вантажів

$M, \text{г}$	$m, \text{г}$	$a, \text{м/с}^2$	$\mu$
22,65	2,6	5,6	0,276

Величина достовірності апроксимації даних становить 0,9979. Значення  $\mu = 0,276$  узгоджується з величиною раніше визначеного коефіцієнта тертя  $\mu = 0,266$ . Величина коефіцієнта тертя нитки об циліндр  $\mu = 0,27$  у подальшому використовувалася для вимірювань кінематичних параметрів петльового маятника, вихідні дані якого наведено в табл. 3, а результати вимірювань – у табл. 4 і на графіках рис. 4, 5.

Таблиця 3

Вихідні дані петльового маятника

$M, \text{г}$	$m, \text{г}$	$M/m$	$L, \text{м}$	$r, \text{мм}$	$S_0, \text{м}$	$y_0, \text{м}$	$\mu$	$\theta_0$ град	$\omega_0, \text{с}^{-1}$
22,65	2,6	8,71	0,79	15,2	0,685	0,081	0,27	90	0

$L$  – довжина нитки,  $r$  – радіус стрижня,  $S_0$  – початкова довжина маятника,  $y_0$  – початкова координата тягарця,  $\theta_0$  – початковий кут між точками дотику нитки маятника й нитки тягарця,  $\omega_0$  – початкова кутова швидкість.

Таблиця 4

Результати дослідів

$t, \text{с}$	$\Delta t \text{ с}$	$Y_{\text{смарт}} \text{ мм}$	$Y_{\text{факт}} \text{ м}$	$S_{\text{факт}} \text{ м}$	$\vartheta, \text{град}$
5,380	0,000	0,106	0,081	0,685	90
5,435	0,055	0,115	0,090	0,676	92
5,488	0,108	0,130	0,105	0,659	97
5,541	0,161	0,150	0,125	0,637	104
5,594	0,214	0,215	0,190	0,572	110
5,647	0,267	0,310	0,285	0,473	120
5,700	0,320	0,385	0,360	0,394	135
5,753	0,373	0,450	0,425	0,324	155

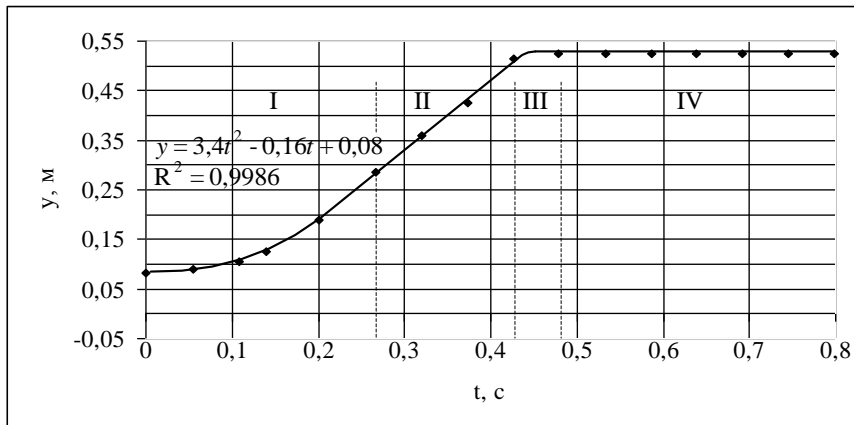


Рис. 4. Графік залежності координати  $y$  від часу падіння вантажу  $M$

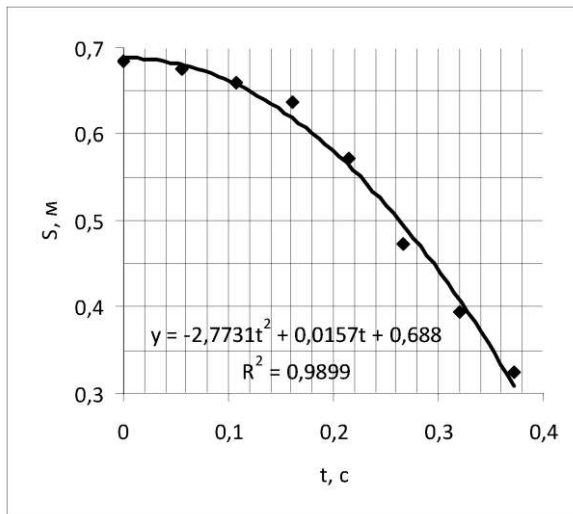


Рис. 5. Графік зміни довжини маятника  $S$  від часу  $t$

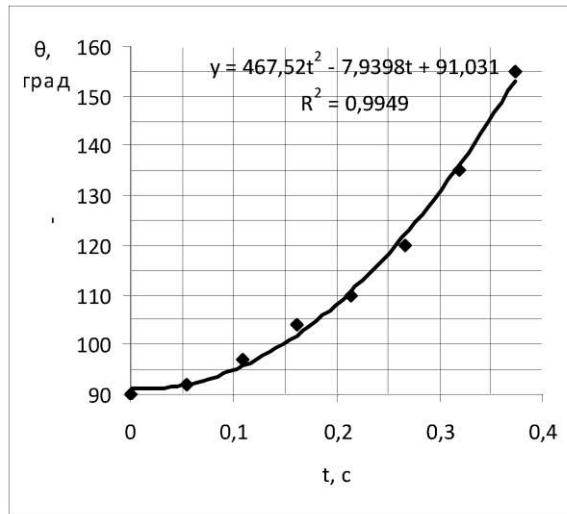


Рис. 6. Графік зміни кута  $\vartheta$  від часу  $t$

**ОБГОВОРЕННЯ**

Аналіз даних дозволив виділити чотири етапи руху тягарця  $M$ : на ділянці I, коли кут  $\vartheta$  змінювався від  $90^\circ$  до  $120^\circ$ , прискорення складало величину  $a_2 = 6,8 \text{ м/с}^2$ , що більше прискорення  $a_1 = 5,6 \text{ м/с}^2$ , коли кут  $\theta = 180^\circ$  був незмінним (див. рис. 4). В області II, коли кут змінювався від  $120^\circ$  до  $240^\circ$  і сила тертя зростала, швидкість стабілізувалася і складала величину  $1,43 \text{ м/с}$ . На ділянці III відбувалося гальмування вантажу з прискоренням  $46 \text{ м/с}^2$  після чого (на часовій ділянці IV) вантаж перестав рухатися.

У той же час на етапі I менший вантаж мав також прискорення  $a_m = 5,6 \text{ м/с}^2$ , як це видно з рівняння руху вантажу  $m$ , наведеного на рис. 5. Графік зміни кута  $\vartheta$  від часу  $t$  на цій часовій ділянці I наведено на рис. 6. У сукупності ці два графіка дають можливість визначити траєкторію руху важка петльового маятника масою  $m$  (рис. 7).

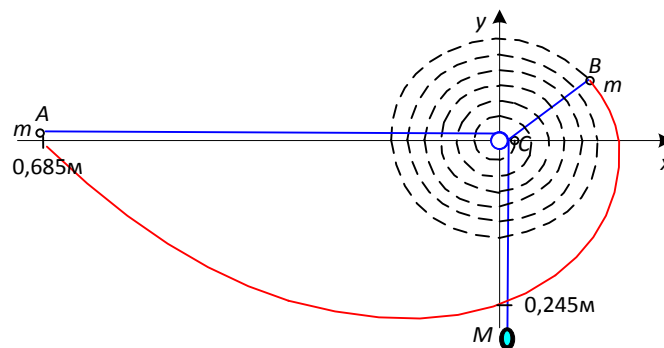


Рис. 7. Траєкторія руху петльового маятника

Стартує тягарець масою  $m$  з позиції, яка позначена на рис. 7 точкою А. За рахунок руху більш важкого тягарця масою  $M$  він наближається до центрального циліндра по траєкторії у вигляді логарифмічної спіралі поки не досягне точки В. В цієї точці важкий тягарець  $M$  зупиняється, а легкий описує спіральну траєкторію до точки зупинки С. Кожен оборот зменшує довжину нитки обертового маятника на  $2\pi l$ .



Отже, розроблена мініатюрна дослідницька установка "Петльовий маятник" та методика її використання дає змогу фронтального проведення лабораторних робіт "Визначення коефіцієнта тертя гнучких тіл при ковзанні по циліндру" і "Петльовий математичний маятник зі змінною довжиною нитки" на уроках фізики. Важливим є те, що для реєстрації кінематичних параметрів руху використовуються смартфони в режимі відео "slow motion" та "секундомір". Це розв'язує проблему забезпечення навчальних закладів сучасним лабораторним обладнанням. Крім того, розширюються межі навчального процесу: студенти можуть отримати доступ до лабораторних установок у комфортний для них та викладача час і проводити експерименти дома.

### ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Доведено, що розроблені мініатюрні установки надають можливість фронтального проведення лабораторних робіт з використанням формули Ейлера. Студенти при проведенні експериментів визначають величину коефіцієнта тертя при ковзанні гнучких тіл по нерухомому циліндру та знайомляться з законом тертя гнучких тіл, який відрізняється від закону тертя ковзання твердих тіл по плоскій поверхні. Цей висновок власне і пропонується підтвердити студентам за допомогою експериментальної установки, де теоретично отримані залежності повністю узгоджуються з результатами експериментів.

Перспективи подальшого дослідження полягають у вивченні впливу різних факторів на траєкторію руху тіла, а саме: зміни маси маятника під час руху, залежність висоти падіння та швидкості падіння з часом при зміні величини співвідношення мас  $M/m$ , або зміни довжини нитки  $L$ , значень кутів вивільнення  $\theta_0$ . Крім цього необхідно розробити комп'ютерну програму, яка забезпечить теоретичне моделювання траєкторії руху маятника. Щодо вдосконалення методики реєстрації траєкторії руху, необхідно додати імпортування відео в програмне забезпечення Tracker, а також зробити вантажі й нитку маятника світловипромінюючими.

### Список використаних джерел

1. GetAClass. Петлевой маятник. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=B0JSbnOZr38&t=82s> (Дата звернення 29.05.2020).
2. Исследование движения петлевого маятника. URL: <https://ppt-online.org/463856> (Дата звернення 29.05.2020).
3. Литвинов О.И., Михайлович Я.М., Бойко А.В., Березовий М.Г. *Теоретична механіка. Ч.1. Статика. Кінематика*. Київ: Агроосвіта, 2013. 576 с.
4. Лубенец Н.А. Альтернативный формуле Эйлера закон реализации тягового усилия трением. *Научный вестник НГУ*. 2008. № 11. С. 67–70.
5. Тарг С.М. *Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов*. Москва: Высшая школа, 2010. 416 с.
6. Zhou Yu-bo, Yang Ming-duo, Zhang Min, Fan Dai-he, Liu Qi-jun, Chang Xiang-hui, Jia Xin-yan, Wei Yun. Research on the Looping Pendulum Phenomenon. *European Journal of Physics*. 2020. Vol. 41. №2. P. 1-16. DOI: 10.1088/1361-6404/ab5e68

### References

1. GetAClass. Looping pendulum (2019). *youtube.com*. Retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=B0JSbnOZr38&t=82s> [in Russian].
2. Study of the motion of a looping pendulum. (n.d.). *ppt-online.org*. Retrieved from <https://ppt-online.org/463856> [in Russian].
3. Lytvynov O.I., Mykhailovych Ya.M., Boiko A.V. & Berezoviy M.H. (2013). *Teoretychna mekhanika. Ch.1. Statyka. Kinematyka [Theoretical mechanics. P.I. Statics. Kinematics]*. Kyiv: Ahroosvita [in Ukrainian].
4. Lubenec, N.A. (2008). Al'ternativnyj formule Jejlера zakon realizacii tjagovogo usilija treniem [Alternative to the Euler formula, the law of friction traction]. *Naukovyi visnyk NHU – Scientific Bulletin of NHU*, 11, 67–70.
5. Targ S.M. (2010). *Kratkij kurs teoreticheskoj mehaniki [Short course of theoretical mechanics]*. Moscow: Vysshaja shkola [in Russian].
6. Zhou Yu-bo, Yang Ming-duo, Zhang Min, Fan Dai-he, Liu Qi-jun, Chang Xiang-hui, Jia Xin-yan, & Wei Yun. (2020). Research on the Looping Pendulum Phenomenon. *European Journal of Physics*, 41(2), 1-16. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ab5e68>.

### DEVELOPMENT AND METHODOLOGICAL SUPPORT OF FRONTAL LABORATORY WORK IN PHYSICS "THE LOOPING PENDULUM"

V.M. Zdesychyts, A.M. Chernych

Kryvyi Rih State Pedagogical University, Ukraine

A.V. Zdesychyts

Kryvyi Rih National University, Ukraine

**Abstract.** The technique of carrying out frontal laboratory work in physics, which uses miniature devices to determine the coefficient of sliding friction of a flexible body along a fixed cylinder and the kinematic parameters of a looping pendulum using a smartphone is considered.

**Formulation of the problem.** Euler's solution to the problem of sliding a flexible body over a fixed cylinder is considered in the teaching of physics as a classic example of solving problems of mechanics by analytical method, but the lack of practical evidence of theoretical conclusions significantly reduces the quality of students' knowledge.

**Materials and methods.** The work is theoretical and applied. The problem was solved with the use of developed miniature research facilities based on the theoretical foundations of the Euler problem. Methodologically, the studies were based on the known laws of kinematics and conservation of energy, and its main scientific and practical results were obtained using photo and video recording, digital technologies for processing the results of experiments.

**Results.** The main result of the work is the development of a miniature research facility "The looping pendulum" and methods of its use for frontal laboratory work "Determination of the friction coefficient of flexible bodies when sliding along a cylinder" and "The looping mathematical pendulum with a variable length of the string". What is important is that smartphones are used in "stopwatch" and "slow-motion" modes to record kinematic motion parameters. It solves the problem of providing educational institutions with

*modern laboratory equipment. Besides, the boundaries of the educational process are expanding: students can access lab facilities at a comfortable time for them and the teacher.*

**Conclusions.** *It is proved that the developed miniature facility makes it possible to carry out frontal laboratory work using the Euler formula. During the experiments, students determine the value of the friction coefficient of flexible bodies when sliding along a fixed cylinder over a fixed cylinder and learn the law of friction of flexible bodies, which differs from the law of friction of sliding solid bodies on a flat surface. This conclusion is proposed to prove to students using an experimental facility, where the theoretically obtained dependencies are completely consistent with the experimental results.*

**Key words:** *physical experiment, lab work, the looping pendulum, Euler's formula.*