Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Гриб'юк О.О. Система динамічної математики GeoGebra як засіб підтримки загальних і спеціальних здібностей учнів в процесі дослідницького навчання предметів математичного циклу: з досвіду роботи. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 2(24). С. 37-51.

Hrybiuk O. System of dynamic mathematics of GeoGebra as a means of supporting general and special abilities of students in the process of research learning: practical work experience. Physical and Mathematical Education. 2020. Issue 2(24). P. 37-51.

DOI 10.31110/2413-1571-2020-024-2-006
УДК 373.5:5]:004

О.О. Гриб'юк
Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України, Україна
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Україна
olenagrybyuk@gmail.com
ORCID: 0000-0003-3402-0520

СИСТЕМА ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ GEOGEBRA ЯК ЗАСІБ ПІДТРИМКИ ЗАГАЛЬНИХ І СПЕЦІАЛЬНИХ ЗДІБНОСТЕЙ УЧНІВ В ПРОЦЕСІ ДОСЛІДНИЦЬКОГО НАВЧАННЯ ПРЕДМЕТІВ МАТЕМАТИЧНОГО ЦИКЛУ: З ДОСВІДУ РОБОТИ

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Система динамічної математики (СДМ) GeoGebra використовується не лише в процесі навчання у закладах вищої освіти, але під час навчання шкільного курсу математики. Реформа сучасної школи поставила перед учителями завдання практичної спрямованості навчання предметів математичного циклу. Для вирішення цієї проблеми необхідно: забезпечити повноту, систематичність та усвідомленість основ наукових знань, їх міцність і дієвість; ознайомити учнів з основними методами пізнання природи – спостереженням і експериментом; навчати їх розпізнавати фізичні, хімічні тощо явища та закономірності в природі і техніці; навчити використовувати знання для пояснень і дослідження явищ природи, розвивати дослідницьке мислення з використанням СДМ, інноваційних технологій навчання.*

Матеріали та методи. *У дослідженні використовувались емпіричні методи: спостереження за навчальним процесом учнів під час їх навчання математики, аналіз результатів навчальних досягнень учнів. Ефективно використовувався набір методів наукового пізнання: порівняльний аналіз для з'ясування різних поглядів на проблему та визначення напрямку дослідження; систематизація та узагальнення для формулювання висновків та рекомендацій; узагальнення авторського педагогічного досвіду та спостережень в рамках експериментального дослідження. Використовувався диференційно-інтеграційний підхід із врахуванням теоретико-експериментальної верифікації результатів дослідження, показників переваги у ставленні учнів до використання окремих інформаційних ресурсів і рівнями інтелектуального розвитку.*

Результати. *У дослідженні знайдені кореляції між показниками переваги у ставленні учнів до використання окремих інформаційних ресурсів і рівнями інтелектуального розвитку учнів для окремих груп інформаційних ресурсів. Параметризація використовувалася для здійснення коригування методики дослідницького навчання з метою педагогічно доцільного та методично вмотивованого добору навчальних ресурсів в контексті мінімізації протиріч з врахуванням рівнів інтелектуального розвитку учнів, характерними для конкретної групи учнів (класу). Результати експериментального дослідження із використанням комп'ютерно орієнтованої методичної системи дослідницького навчання (КОМСДН) в контексті вивчення особистісних компонентів загальних і спеціальних здібностей учнів виявилися значущими на рівні достовірності (р [illegible] 0,05). Використання СДМ GeoGebra в дослідженні розглядається в декількох напрямах: уточнення термінологічного апарату та механізмів роботи інструментів із врахуванням системи понять і тверджень шкільного курсу математики; розширення спектру математичних дисциплін і системи дослідницьких задач, розрахунково- графічних робіт з педагогічно виваженим і методично вмотивованим використанням СДМ GeoGebra; розширення можливостей експорту та імпорту навчального матеріалу в рамках дослідницького навчання учнів; підвищення доступності GeoGebra в умовах різного рівня технічного забезпечення учнів. Переваги і недоліки комп'ютерного моделювання розглядаються в контексті навчальної і методичної діяльності, для підтримки якої вони призначені.*

Висновки. *Розглядаються можливості використання СДМ GeoGebra в процесі дослідницького навчання учнів предметів математичного циклу з педагогічно виваженим використанням компонентів КОМСДН. Оцінювання переваг і недоліків комп'ютерного моделювання носить суб'єктивний характер, оскільки позитивні аспекти і негативні наслідки використання GeoGebra визначаються вміннями вчителя методично вмотивовано та педагогічно виважено використовувати компоненти КОМСДН в навчально-виховному процесі. Матеріали дослідження будуть корисними вчителям математики, викладачам і студентам педагогічних університетів, слухачам системи післядипломної педагогічної освіти та усім, хто цікавиться математичною освітою.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *моделювання, комп'ютерно орієнтована методична система дослідницького навчання, інтелектуальний розвиток, КОМСДН, дослідницьке навчання, розрахунково-графічні роботи, GeoGebra.*

ВСТУП

Поширення ідей і методів геометрії в різні галузі науки і виробництва, зростання ролі геометричної освіти, використання інформаційно-комунікаційних технологій в науковій і освітній діяльності сприяє підвищенню актуальності методичних досліджень в процесі навчання математики, зокрема геометрії.

Ґрунтовний аналіз праць (В. Ю. Бикова, В. М. Глушкова, М. І. Жалдака, В.А. Далінгера, В.П. Дьяконова, А.І.Іванова, Ю.Г. Ігнатьєва, М.П. Лапчика, Г.В. Носовського, Ю. С. Рамського, В.Б. Таранчука, Є.К. Хеннера та ін.) і дисертаційних досліджень (О.А. Бушкової. В.І. Глізбург, В.Р. Майєра, Л.П. Мартиросян і ін.), які присвячені використанню систем комп'ютерної математики в процесі навчання предметів природничо-математичного циклу у закладах загальної середньої освіти, дозволяє зробити висновок про те, що проблема навчання учнів розв'язувати математичні (алгебраїчні, геометричні) задачі з використанням комп'ютерних методів залишається актуальною та водночас недостатньо дослідженою проблемою (Жалдак, 2003). Дотепер стрімко розвивається комп'ютерне (геометричне) моделювання. В тому числі розроблено багато програм, що використовуються для візуалізації геометричних об'єктів, що виникають в процесі моделювання різних процесів, дослідження їх властивостей і узгодження комп'ютерних експериментів з метою перевірки математичних, фізичних, біологічних, екологічних, економічних та інших гіпотез (Беспалько, 2002). Комп'ютерна модель – це засіб відображення зв'язків і співвідношень, сутностей геометричних об'єктів. В процесі розв'язування задачі моделі геометричних об'єктів є необхідними інструментами дослідження, проведення експериментів, перевірка гіпотез і уточнення фактів, можливостей виокремлювати закономірності і формулювати узагальнені твердження (Гриб'юк, 2013).

В нормативних документах про математичну освіту (Концепції шкільної математичної освіти, Закону України «Про освіту», Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року, Плану заходів на 2017–2029 роки із її запровадження та з урахуванням вітчизняного і зарубіжного досвіду організації навчання шкільної математики) рекомендується використовувати СДМ з метою досягнення двох ефектів: забезпечення учням можливостей для здійснення експериментування з використанням СКМ і здійснення візуалізації математичних об'єктів (моделей) з метою підвищення мотивації та рівня знань учнів в процесі дослідницького навчання предметів природничо-математичного циклу (Гриб'юк, 2020).

Виникнення комп'ютерної техніки призвело до поширення в математиці експериментального підходу. Велике значення в математичних дослідженнях мають комп'ютерні експерименти, що підтверджують, або заперечують гіпотезу, або наштовхують учнів на нову ідею. Методи експериментальної математики суттєво змінюють характер математичного дослідження, отримання результатів і способи проведення доведень, знаходять відповідне застосування в навчанні математики (Takači D., Stankov G., Milanovic I., 2015; Семеніхіна О.В., 2015; Шабанова, 2016; Ястребов, 2017).

Завдяки використанню сучасних інформаційно-комунікаційних технологій з'являються можливості для проведення математичних експериментів та досліджень. Комп'ютерні засоби використовуються для висування гіпотез, які пізніше доказово обґрунтовуються. Наприклад, для формулювання гіпотез, пов'язаних з використанням комп'ютерного моделювання в процесі дослідницького навчання предметів природничо-математичного циклу та їх експериментальної перевірки в дослідженні (Гриб'юк, 2019a) використовуються ППЗ, система динамічної математики GeoGebra. Експериментальні методи використовувались вченими упродовж усієї історії розвитку математичної науки. Саме на оцінюванні переваг і недоліків щодо використання СДМ *GeoGebra* в процесі досягнення вище зазначених цілей акцентується увага у дослідженні (Гриб'юк, 2019b).

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В процесі експериментального дослідження (Гриб'юк, 2016; Гриб'юк, 2019a) із врахуванням педагогічно виваженого та методично вмотивованого добору інформаційних ресурсів враховувалися психофізіологічні та психолого-педагогічні фактори, серед яких велике значення мають особливості інтелектуального розвитку учнів. Визначення доцільності використання комп'ютерно орієнтованої методичної системи дослідницького навчання (КОМСДН) та інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання учнів предметів природничо-математичного циклу в школі та оцінювання ставлення учнів до ідентифікованих ресурсів слугувало метою здійсненого експерименту. Отримані в процесі здійснення експериментального дослідження дані використовувалися для відповіді на запитання: *Вкажіть, які інформаційні ресурси та КОМСДН є найбільш актуальними в процесі навчання предметів природничо-математичного циклу? Зазначте, чи існують кореляційні зв'язки між перевагами у ставленні учнів до використання окремих інформаційних ресурсів та рівнями інтелектуального розвитку школярів? Вкажіть, яким чином необхідно ефективно здійснювати добір інформаційних ресурсів для підвищення рівня мотивації учнів та ефективності процесу дослідницького навчання? (див. Таблицю 1, Таблицю 2).* Розроблено відповідні критерії оцінювання ставлення опитаних учасників експерименту до застосування компонентів КОМСДН. Результати дослідження виявилися значущими на рівні достовірності ($p \le 0{,}001$) (Гриб'юк, 2020).

Таблиця 1

Кореляційні зв'язки між показниками переваги у ставленні учнів до використання окремих інформаційних ресурсів

Інформаційний ресурс	СДМ	Графіки	Діаграми	Схеми	Таблиці
СДМ	1,000	0,220 (0,281)	0,341 (0,089)	0,481 (0,013)	0,511 (0,008)
Графіки	0,220 (0,281)	1,000	0,582 (0,002)	0,454 (0,02)	0,209 (0,305)
Діаграми	0,341 (0,089)	0,582 (0,002)	1,000	0,551 (0,004)	0,266 (0,189)
Схеми	0,481 (0,013)	0,454 (0,02)	0,551 (0,004)	1,000	0,578 (0,002)
Таблиці	0,511 (0,008)	0,209 (0,305)	0,266 (0,189)	0,578 (0,002)	1,000

Таблиця 2

Кореляційні зв'язки між показниками переваги у ставленні учнів до використання окремих інформаційних ресурсів і рівнями інтелектуального розвитку учнів

Рівень інтелектуального розвитку	СДМ	Графіки	Діаграми	Схеми	Таблиці
I	-0,406 (0,049)	-0,627 (0,001)	-0,371 (0,074)	-0,328 (0,118)	-0,113 (0,598)
II	-0,489 (0,015)	-0,428 (0,037)	-0,471 (0,020)	-0,380 (0,067)	-0,556 (0,005)
III	0,014 (0,949)	-0,300 (0,154)	-0,221 (0,300)	-0,080 (0,711)	-0,060 (0,781)
IV	-0,116 (0,589)	-0,359 (0,085)	-0,461 (0,023)	-0,493 (0,014)	-0,441 (0,031)

Результати експериментального дослідження із використанням методики КОМСДН вивчення особистісних компонентів загальних і спеціальних здібностей учнів виявилися значущими на рівні достовірності ($p \leq 0,05$) *(див. Таблицю 3).*

Таблиця 3

Результати експериментального дослідження із використанням методики КОМСДН вивчення особистісних компонентів загальних і спеціальних здібностей учнів

№ з/п	Назва показника	Середнє значення показників		Значення t-критерію Стьюдента	Різниця U-критерію Mann-Whitney
		класи з високою успішністю з математичних дисциплін (ср. матем.≥ 4,75) – 77 уч.	класи з низькою успішністю з математичних дисциплін (ср. матем.< 4,75)- 227 уч.		
Спеціальні здібності					
1	Спрямованість математичного розвитку	62,62	52,93	3,452	0,001
2	Математична пам'ять	62,21	57,91	1,380	0,259
3	Математична інтуїція	60,71	53,85	2,054	0,042
4	Математична мова	69,00	57,96	3,475	0,003
5	Математичне мислення	65,62	56,21	3,489	0,001
6	Експериментальні здібності	64,93	62,66	0,699	0,704
7	Виконання математичних обчислення	69,40	58,82	3,389	0,004
8	Самооцінювання математичних здібностей	64,73	57,19	3,107	0,008
Загальні здібності					
9	Пам'ять	60,43	60,83	-0,112	0,880
10	Інтуїція	59,53	62,84	-0,877	0,411
11	Мислення	68,15	62,69	2,418	0,085
12	Мовні здібності	57,84	57,83	0,003	0,905
13	Винахідливість	60,31	65,26	-1,415	0,117
14	Математичні здібності	60,03	51,60	2,355	0,090
15	Розв'язування задач	52,25	39,48	3,497	0,000
16	Самооцінювання загальних здібностей	59,35	57,22	0,897	0,251

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ідея дослідницького навчання математики у вітчизняній науці зародилася в середині XVIII століття як ідея наближення навчання математики та наукового дослідження математичної науки. Історія розвитку експериментального підходу в математиці і математичній освіті ґрунтовно описано в монографії (Гриб'юк, 2019).

Згідно чинного стандарту загальної середньої освіти передбачається використання математичних методів в наукових дослідженнях, застосування методів математичного і алгоритмічного моделювання в процесі аналізу прикладних проблем, оволодіння здібностями самостійного виконання науково-дослідницької роботи; розв'язування прикладних задач, в тому числі з педагогічно виваженим та методично вмотивованим використанням інформаційно-комунікаційних технологій. В тому числі, в процесі підготовки майбутніх бакалаврів особливе місце займає комп'ютерна геометрія, яку можна вважати зв'язуючою ланкою між іншими математичними дисциплінами, що містяться в навчальному плані.

В дослідженні під дослідницьким навчанням розуміється навчальний процес, пов'язаний з розв'язуванням творчої, дослідницької задачі із заздалегідь відомою відповіддю та такою, що передбачає наявність основних етапів, характерних для дослідження в науковому середовищі: постановку проблеми; вивчення теорії, пов'язаної з обраною темою; добір методик дослідження та практичне їх засвоєння; накопичення власного навчального матеріалу, його аналіз та узагальнення; власні висновки. В навчанні мета дослідницької діяльності полягає в набутті учнями дослідницьких умінь як способу засвоєння дійсності, в розвитку здібностей до дослідницького способу мислення, в розвитку інтелекту учнів.

В навчально-виховному процесі особливе місце займає факультативний курс з комп'ютерної геометрії, яку можна вважати сполучною ланкою з іншими предметами природничо-математичного циклу, що містяться в навчальному плані

(Гриб'юк, 2010). Комп'ютерна геометрія займається комп'ютерним моделюванням, пов'язаним з візуалізацією геометричних моделей. З використанням інструментарію комп'ютерної геометрії молодий дослідник отримує можливість проводити різноманітні комп'ютерні експерименти, в результаті чого формуються або відхиляються ті чи інші гіпотези. Саме тому вимоги щодо геометричної підготовки учнів ефективно переходять на новий рівень. В експериментальному дослідженні (Гриб'юк, 2019a) розглядаються приклади, де демонструється ефективність використання експериментальних дослідницьких методів в процесі розв'язування математичних задач. Однак, найчастіше, учням у процесі навчання математики пропонуються готові конструкції, позбавляючи їх, тим самим, можливості робити вірні висновки з урахуванням власного і певним чином організованого досвіду.

СДМ GeoGebra як засіб підтримки дослідницького мислення учнів в процесі реалізації дослідницького підходу в навчанні предметів математичного циклу.

Створено комп'ютерно орієнтовану методичну систему дослідницького навчання учнів предметів математичного циклу, компонентами якої є традиційні засоби наочності (таблиці, діаграми, формули, схематичні креслення, моделі та ін.) і засоби та прийоми активізації дослідницького мислення учнів процесі дослідницького навчання. З використанням *GeoGebra* можна створювати креслення математичних об'єктів, які описуються з використанням аналітичних залежностей в декартовій або полярній системах координат, геометричних перетворень, позиційних і метричних властивостей, логічних операцій, дій з векторами і комплексними числами (Гриб'юк, 2013).

Важливо, що при цьому будь-які задані об'єкти або величини *(міра, дійсне число, міра кута, координати, довжина відрізка, значення функціональної залежності, метрична величина та ін.)* можуть бути параметрами зміни динамічного креслення, відповідних зображень та тексту. З використанням конструктивного функціоналу СДМ *GeoGebra* в учнів з'являється можливість створювати *«узагальнений образ об'єктів (понять)»*, що описано в навчальному матеріалі *(сформульоване означення, умова теореми, задачі).* Для створення графічного образу об'єктів, які задані аналітично, необхідно записати формулу в командному рядку модуля *«Алгебра і графіки»*, а відповідну побудову геометричної фігури – в командному рядку модуля *«Елементарна геометрія»*. Для розв'язування задачі необхідно здійснити перетворення запису в рядковий із використанням функцій, вбудованих у модуль. Нижче наведено деякі приклади.

Приклад 1. Знайти значення параметра *a*, за яких система (1) має три різні корені?

$$\begin{cases} y = a(x-4), \\ y^2 + 2(x-2)y + (x^2-4)(2x-x^2) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Вказівки до розв'язування:

$$(y - x^2 + 2x)(y + x^2 - 4) = 0 \tag{2}$$

Дослідимо систему (1) і побудуємо її графік (див. Рис. 1 Таблиці 4).Через точку *A*(4; 0) проходить сімейство прямих $y = a(x-4)$. Виокремимо ті з них, що мають з графіком другого рівняння три спільні точки (прямі *AB, AC, AD, AF)*.

Окрім того, бачимо ще дві прямі, що задовольняють умову задачі. З точки *A* до параболи $y = x^2 - 2x$ проведемо дві дотичні (на рис. 1 проведено одну дотичну *AB*). Інша дотична, проведена до графіка функції $y = 4 - x^2$ в двох точках. Аналогічний результат отримуємо: інша дотична до параболи $y = 4 - x^2$ відмінна від *AF*.

На основі аналізу моделі робимо висновок про наявність шести розв'язків. Якщо рівняння $a(x-4) = x^2 - 2x$ і $a(x-4) = 4 - x^2$ матимуть один корінь, то кутові коефіцієнти дотичних до кривих $y = x^2 - 2x$ та $y = 4 - x^2$ дорівнюють відповідно $a = 6 \pm 4\sqrt{2}$ і $a = -8 \pm 4\sqrt{3}$.

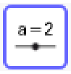
$$x^2 - 2x = 4 - x^2 \tag{3}$$

Абсциса точки *M* дорівнює від'ємному кореню рівняння (3): $x = -1$. Тоді кутовий коефіцієнт прямої *AD* дорівнює $\left(-\frac{3}{5}\right)$.

Кутовий коефіцієнт прямої *AC* дорівнює 0. Отже, $a = 6 \pm 4\sqrt{2}$, $a = -8 \pm 4\sqrt{3}$, $a = -\frac{3}{5}$, $a = 0$.

Таблиця 4

Вказівки до розв'язування завдання для індивідуальної та групової роботи в процесі дослідницького навчання учнів

<table>
<tr>
<td>Правило-орієнтир:
1. Побудувати графік функції $y = x^2 - 2x$.
В рядок формул записати функцію: y = x^2 – 2*x.
2. Побудувати графік функції $y = 4 - x^2$.
В рядок формул записати функцію: y = 4 – x^2 .


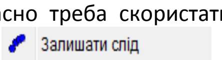
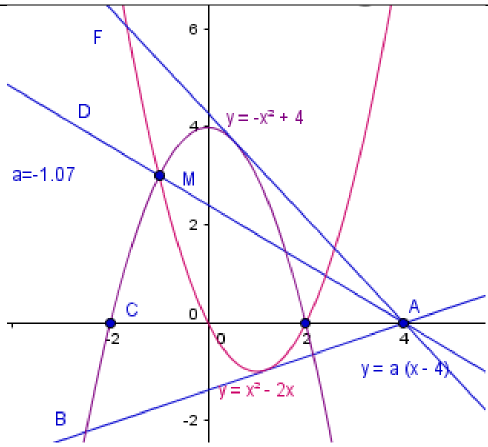
3. Створити повзунок для параметра a з інтервалом від –5 до 5 та приростом Δ = 0.01.
4. Побудувати пряму $y = a(x-4)$.
5. Із зміною значення параметра змінюватиметься положення відповідної прямої (AB, AC, AD, AF). Досліджуємо кількість розв'язків.
6. Для збереження положення всіх прямих на графіку одночасно треба скористатися функцією «Залишити слід» 
</td>
<td>

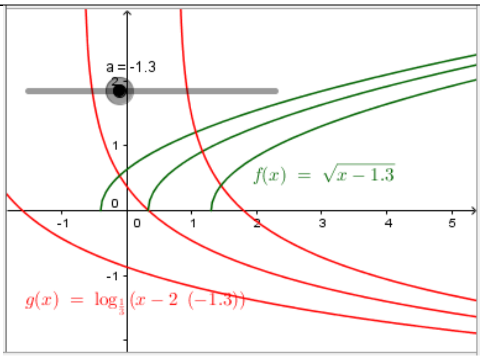
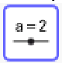
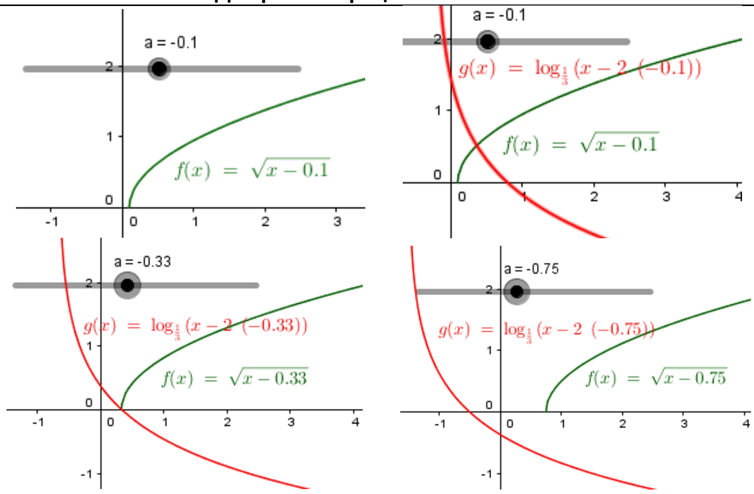
Рис. 1. Графіки функцій. Джерело: опрацювання власне</td>
</tr>
</table>

Приклад 2. Скільки розв'язків залежно від значень параметра *a* має рівняння (див. Рис. 2-3 Таблиці 5).

$$\sqrt{x+a}=\log_{\frac{1}{3}}(x-2a)? \tag{4}$$

Таблиця 5

Вказівки до розв'язування завдання для індивідуальної та групової роботи в процесі дослідницького навчання учнів

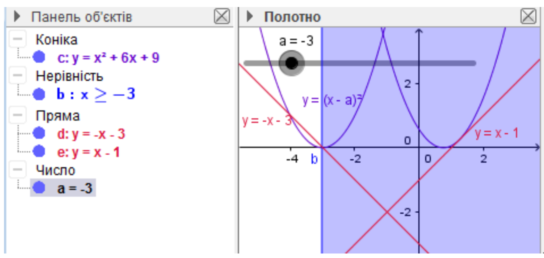
Вказівки до розв'язування: Введемо заміну (4): $t=x-2a$, $\sqrt{t+3a}=\log_{\frac{1}{3}}t$ Отже, якщо $a\geq-\frac{1}{3}$, то рівняння має один корінь; якщо $a<-\frac{1}{3}$, то рівняння не має розв'язків (див. рис. 2).	**Рис. 2. Графічне зображення – залежність від значень параметра *a*** **Джерело: опрацювання власне**
Правило-орієнтир (див. рис. 3): 1. Створити повзунок для параметра *a*  з інтервалом від –5 до 5 та приростом 0.01. 2. Побудувати графік функції $y=\sqrt{x+a}$. В рядок формул записати функцію *y = sqrt(x + a)*. 3. Побудувати графік функції $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-2a)$. В рядок формул – функцію *y = log(1/3, x–2a)*. 4. Із зміною значення параметра *a* змінюються відповідні положення значень функцій.	**Рис. 3. Правило-орієнтир – залежність від значень параметра *a*** **Джерело: опрацювання власне**

Приклад 3. Знайти всі значення параметра *a,* за яких система рівнянь (5) має розв'язки (Рис. 4-5 Таблиці 6).

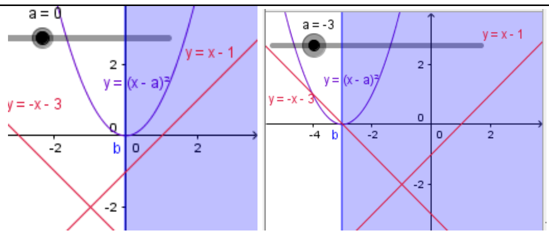
$$\begin{cases} y^2-x^2-2x+4y+3=0, \\ x=a+\sqrt{y} \end{cases} \tag{5}$$

Таблиця 6

Вказівки до розв'язування завдання для індивідуальної та групової роботи в процесі дослідницького навчання учнів

Вказівки до розв'язування (5): $y=(x-a)^2$, $x\geq a$. Залежність представляє собою сімейство напівпарабол, які *«ковзають»* вершинами вздовж осі абсцис, причому розглядається лише права вітка. Розкладання на прості множники: $y^2-x^2-2x+4y+3=(y^2+4y+4)-(x^2+2x+1)=(y+x+3)(y-x+1)$ $y=-x-3,\ \ y=x-1$. При яких значеннях параметра *a* сімейство напівпарабол має з однією зі знайдених прямих хоча б одну спільну точку (див. рис.4)? Якщо вершини сімейства напівпарабол знаходяться правіше від точки *A*, але лівіше від точки *B* (положення точки *B* відповідає положенню вершини в момент дотику напівпараболи з прямою $y=x-1$), то розглянуті графіки функцій спільних точок не мають. Якщо вершина розташована в точці *A*, тоді очевидно $a=-3$. Розглянемо систему: $\begin{cases} y=x-1, \\ y=(x-a)^2 \end{cases} \Rightarrow x-1=(x-a)^2$.	**Рис. 4. Графічне зображення – залежність значень від параметра *a*. Джерело: опрацювання власне**

<table>
<tr><td>Отже, система (5) не має розв'язків за умови, якщо $-3 < a < \frac{3}{4}$ та має розв'язки за умови: $a \le -3$, або $a \ge \frac{3}{4}$ (див. Рис.4).</td><td></td></tr>
<tr><td>Правило-орієнтир (див. Рис. 5.1-5.2):

1. Створити повзунок для параметра a [a=2] з інтервалом від –5 до 5 та приростом 0.01.
2. Побудувати графік функції $y=(x-a)^2$ за умови, якщо $x \ge a$. В рядок формул записати функцію: y = (x-a)^2.
3. Задати область визначення: $x \ge a$.
4. Будуємо графіки функцій $y=-x-3$, $y=x-1$. В рядок формул записати задані функції.
5. Із зміною значення параметра a змінюється відповідне положення параболи.</td><td>
Рис. 5.1

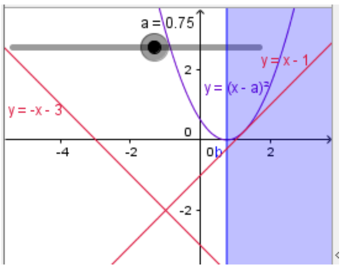



Рис. 5.2. Правило-орієнтир – залежність значень від параметра a. Джерело: опрацювання власне</td></tr>
</table>

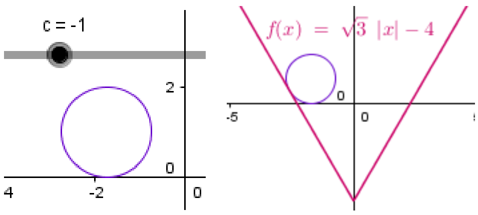
Приклад 4. Знайти найменше значення *c*, за якого система (6) має один розв'язок (див. Рис. 6 Таблиці 7).

$$\begin{cases} \left(x - c\sqrt{3}\right)^2 + y^2 - 2y = 0, \\ \sqrt{3}|x| - y = 4 \end{cases} \qquad (6)$$

Таблиця 7

Вказівки до розв'язування завдання для індивідуальної та групової роботи в процесі дослідницького навчання учнів

<table>
<tr><td>Вказівки до розв'язування: $(x-c\sqrt{3})^2 + (y-1)^2 = 1$
Побудуємо графік функції $y=\sqrt{3}|x|-4$ (див. Рис.6).
Оскільки в умові задачі зазначено, що значення c повинно бути найменшим, то з чотирьох кіл потрібно вибрати те, абсциса центру якого має найменше значення. Йдеться про коло з центром в точці O_1.
$\left|c\sqrt{3}\right| = AP + AO = AP + \frac{4}{\sqrt{3}}$; $\left|c\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}$.
Оскільки положенню центра кола з центром O_1 відповідає $c<0$, то $c = -\frac{7}{3}$
Правило-орієнтир (див. Рис.6):

1. Створити повзунок для параметра c [a=2] з інтервалом від –20 до 20 та приростом 0.05.
2. Побудувати рівняння кола $(x-c\sqrt{3})^2 + (y-1)^2 = 1$. В рядок формул записати: (x – c sqrt(3))² + (y – 1)² = 1.
3. Побудувати графік рівняння $y=\sqrt{3}|x|-4$. В рядок формул записати функцію: y = sqrt(3) abs(x) – 4.
4. Із зміною значення параметра c змінюється відповідне положення кола.</td><td>
Рис. 6.1. Правило-орієнтир – залежність значень від параметра c.

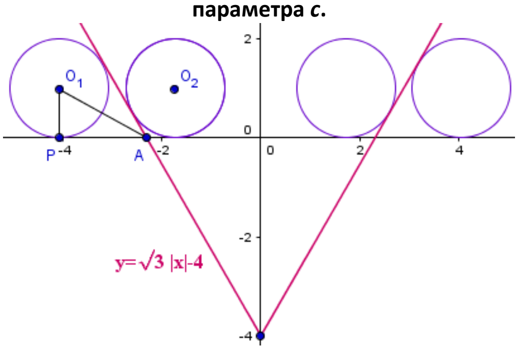



Рис. 6.2. Правило-орієнтир – залежність значень від параметра c. Джерело: опрацювання власне</td></tr>
</table>

СДМ GeoGebra як засіб навчання математичному моделюванню. Побудову геометричних об'єктів використовують в процесі формулювання *динамічних дослідницьких задач (як мету)*, причому будь-яка *нединамічна задача* може бути динамізована *(як засіб)* (Гриб'юк, 2014). З використанням СДМ *GeoGebra* для здійснення динамізації передбачається два інструменти: інструмент *«Переміщувати»*, з використанням якого можна виконувати переміщення точок відповідного креслення-моделі, що визначають положення і форму зображень геометричної фігури та її компонентів; інструмент *«Повзунок»*, з використанням якого можна змінювати параметри моделі. На даному етапі пропонуються типові запитання і завдання: кути $\angle\alpha$, $\angle\beta$ – суміжні, причому $\beta - \alpha = \lambda$. Необхідно задати три різноманітні значення λ. Виконайте переміщення точки на кресленні та отримаєте відповідно кути $\angle\alpha$, і $\angle\beta$, для яких

$\beta - \alpha = \lambda$. Обчислити градусні міри кутів $\angle\alpha$, і $\angle\beta$. З використанням динамічної моделі необхідно виконати дослідження взаємного розташування бісектрис вертикальних кутів. Зобразити результати у графічній формі.

З використанням інструменту *«Повзунок»* учні виокремлюють інваріантні і варіативні компоненти відповідної моделі. Наприклад, учням пропонується *знайти найменшу кількість променів, проведених через дану точку площини (промені проведені таким чином, щоб усі кути, утворені сусідніми променями, були гострими). Увага – будь-яка точка площини повинна належати гострому куту. Інваріантною компонентою є значення кута (гострий), а варіативною – кількість променів.*

З використанням *GeoGebra* можливе створення технічно складних креслень: проекційних зображень стереометричних фігур, розгорток просторових поверхонь, а також віртуальних лабораторій із врахуванням міжпредметних зв'язків, системи задач із використанням готових креслень, візуалізацій процесу їх вирішення і ін. Такі креслення у вигляді файлів *GeoGebra* або аплетів можна виконати самостійно (див. рис. 1-13), або скористатися колекцією готових моделей (Гриб'юк, 2019a). Нижче розглядаються приклади розрахунково-графічних робіт (РГР) (Таблиця 8).

Таблиця 8

Завдання до розрахунково-графічних робіт (РГР) та зразки їх виконання

Виконати зображення комбінації многогранника з тілом обертання та навести побудови цього зображення: 1. Правильна шестикутна піраміда, вписана в кулю. 2. Правильна чотирикутна призма, вписана в кулю. 3. Правильна трикутна призма, описана навколо кулі. 4. Правильна шестикутна піраміда, описана навколо кулі. 5. Циліндр, описаний навколо правильної трикутної призми. 6. Циліндр, вписаний у правильну шестикутну призму. 7. Конус, описаний навколо правильної чотирикутної піраміди. 8. Конус, вписаний у правильну трикутну піраміду. 9. Куля, вписана в конус. 10. Куля, вписана в циліндр. 11. Куля, описана навколо конуса. 12. Куля, описана навколо циліндра.	***Зразок виконання РГР. Тема: Конус, вписаний у правильну чотирикутну піраміду*** **Правило-орієнтир** 1. Зображаємо конус. 2. Навколо основи конуса описуємо основу піраміди (правильний чотирикутник). 3. Вершини основи призми сполучаємо з вершиною конуса. ***Зразок виконання РГР. Тема: Правильна трикутна піраміда, вписана в кулю*** **Правило-орієнтир** 1. Зображаємо кулю, її верхній полюс *(N)* і нижній переріз. 2. Вписуємо в нижній переріз основу піраміди (правильний трикутник). 3. Сполучаємо верхній полюс кулі з вершинами основи.
Схема розв'язання стереометричних задач **1. Обґрунтувати елементи, що визначають задані фігури:** а) форма і розміщення перерізів; б) положення висот; в) положення медіан; г) положення бісектрис та інше. **2. Обґрунтувати, що позначено правильно:** а) кути в просторі *(кут між прямою і площиною (кут нахилу прямої до площини), лінійні кути двогранних кутів);* б) відстані в просторі *(між прямими, між прямою і площиною, між площинами, між гранями та ін.).* **3. Пояснити:** а) взаємне розміщення елементів фігур, що входять до комбінації фігур і не випливають із відповідних означень; б) додаткові побудови, якщо вони виконувалися; в) положення та елементи фігури обертання. **4. На кожному етапі розв'язування вказувати:** а) із якого саме трикутника визначаються елементи; б) обґрунтувати, який саме трикутник розглядається в процесі дослідження.	

Зразок виконання РГР розглядається нижче. **Задача.** У циліндр вписано паралелепіпед зі стороною основи *а*. Діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом α, а з бічною гранню, яка проходить через сторону *а*, утворює кут β. Визначити площу бічної поверхні циліндра (Таблиця 9).

Дано: комбінація циліндра і паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AD = a$, $\angle B_1DB = \alpha$, $\angle B_1DA_1 = \beta$.

Знайти: $S_{\text{біч.п.}}$

Розв'язання: І спосіб: Вводимо прямокутну систему координат. Позначимо $BB_1 = h$, $DC = y$.

Тоді $\vec{AB_1}(a,o,h)$, $\vec{BD}(a,y,o)$, $\vec{BD_1}(a,y,h)$.

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + y^2 + h\cdot 0}{\sqrt{a^2+y^2+h^2}\cdot\sqrt{a^2+y^2+0^2}},\quad \cos\beta = \frac{a^2 + 0\cdot y + h^2}{\sqrt{a^2+0^2+h^2}\cdot\sqrt{a^2+y^2+h^2}},\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{a^2+y^2}}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

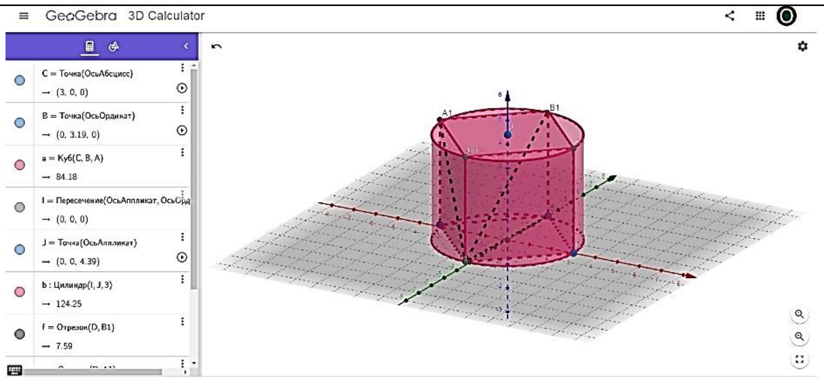
З ΔBDD_1: $h = \left|\vec{BD}\right| tg\alpha$, $\vec{BD}^2 = a^2 + y^2$.

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\left|\overrightarrow{BD}\right|}{\sqrt{a^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 tg^2\alpha}}$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2=\frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}=\frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)},\ S_{\text{б.п.ц}}=\frac{\pi a^2\sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

Таблиця 9

Зразок завдання для індивідуальної та групової роботи в процесі дослідницького навчання учнів

Правило-орієнтир 1. Зображаємо прямокутний паралелепіпед. 2. Навколо основи паралелепіпеда описуємо основу циліндра. 3. Зображаємо циліндр.	 **Рис. 7. Джерело: опрацювання власне (https://www.geogebra.org/3d/rgtajnae)**

II спосіб:

I. Нехай $\angle B_1DB=\alpha$, $\angle A_1DB_1=\beta$.

B_1D – задана діагональ паралелепіпеда.

$BB_1\perp ABC$ за властивістю прямокутного паралелепіпеда, *DB* – проекція *B_1D* на *ABC.*

Отже, $\angle B_1DB=\alpha$ за умовою і означенням кута між прямою і площиною.

II. $A_1B_1\perp A_1D_1D$ за властивістю прямокутного паралелепіпеда, *A_1D* – проекція *B_1D* на *A_1D_1D.*

Отже, $\angle A_1DB_1=\beta$ за умовою і означенням кута між прямою і площиною.

Площу бічної поверхні визначимо з формули $S_{\text{б.п.ц.}}=\pi\cdot BD\cdot B_1B$. Нехай $B_1D=x$.

1. Δ *B_1BD:* $BD=B_1D\cdot\cos\alpha=x\cos\alpha$, $B_1B=B_1D\cdot\sin\alpha=x\sin\alpha$.

2. Δ *B_1A_1D:* $A_1D=B_1D\cdot\cos\beta=x\cos\beta$.

3. Δ *A_1AD:* $A_1D^2=A_1A^2+AD^2$.

$$(x\cos\beta)^2=(x\sin\beta)^2+a^2,\ x^2=\frac{a^2}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

$$BD=\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}},\ B_1B=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}},\ S_{\text{б.п.ц}}=\frac{\pi a^2\sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

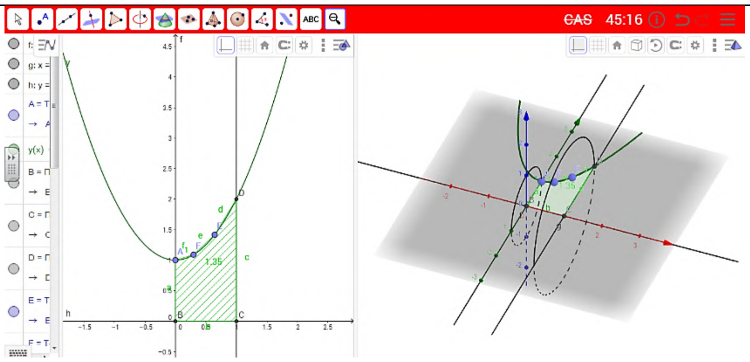
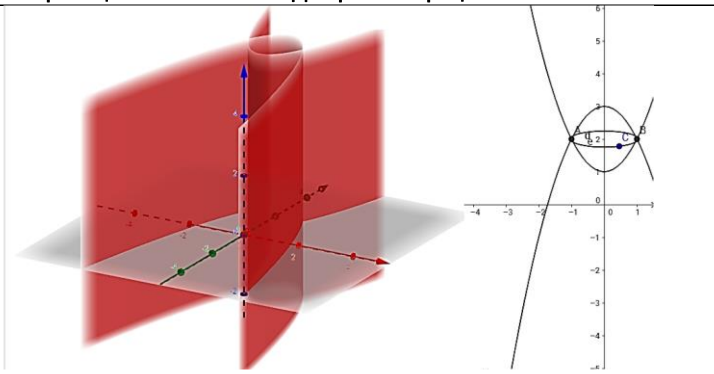
Розвиток в учнів правильного розуміння математики та відображення математичною наукою явищ і процесів реального світу є програмною вимогою в процесі навчання математики, в основу покладено моделювання (математичне і предметне). При навчанні математики визначаємо моделювання, як *узагальнене інтелектуальне вміння учнів, що полягає в заміні математичних об'єктів, їх співвідношень, способів діяльності моделями за допомогою відрізків, числових променів, схем.*

Для моделювання використовують різні математичні абстракції: числові формули, таблиці, формули, функції, рівняння та їх системи, нерівності, системи нерівностей, ряди, геометричні фігури, графосхеми, діаграми Венна, графи тощо. Математичне моделювання використовують при розв'язуванні багатьох прикладних, дослідницьких задач (Гриб'юк, 2010). Рівняння, складене за умовою задачі, є її алгебраїчною моделлю. Моделюванню, особливо алгебраїчному і аналітичному, необхідно приділити в школі належну увагу, оскільки математичні моделі використовуються при розв'язуванні дослідницьких задач (Таблиця 10).

Під час побудови моделі використовуємо порівняння, аналіз через синтез, класифікацію, узагальнення, що сприяють розвитку мислення. Побудова математичної моделі задачі готує учнів до моделювання реальних процесів і явищ (Таблиця 11). В процесі розв'язування дослідницьких задач використовують їх аналітичні моделі. Такою моделлю може бути функція, що описує явище чи процес, рівняння, система рівнянь, нерівність, система нерівностей, система рівнянь і нерівностей та ін. Набір конструктивних інструментів СДМ *GeoGebra* для виконання побудов планіметричних фігур вичерпний з точки зору постановки задачі формування в учнів навичок конструювання динамічних креслень із використанням основних навичок розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки (інструменти «*Циркуль*» та «*Пряма за двома точками*», *«Фіксований відрізок», «Кут заданої величини», «Центр або середина», «Серединний перпендикуляр» та ін.*). Безперечно, передбачена можливість вилучення з панелі інструментів зайвих *(на певному етапі розв'язування задачі)* інструментів та доповнити інструментальне полотно самостійно створеними інструментами (Гриб'юк, 2010; Гриб'юк, 2015).

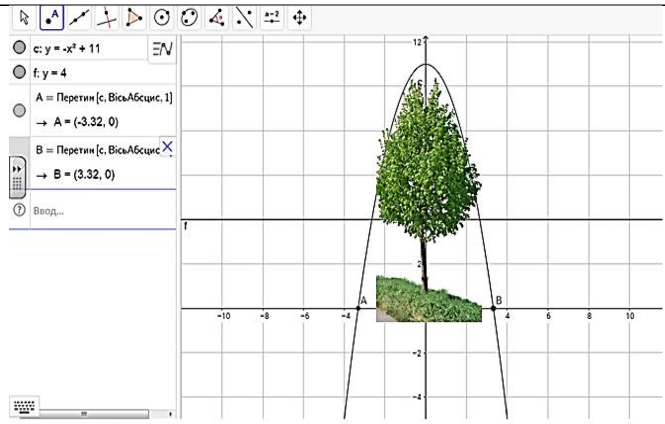
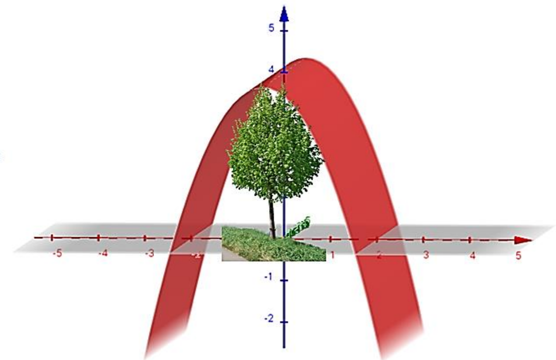
Таблиця 10

Завдання для індивідуальної та групової роботи в процесі дослідницького навчання учнів

 **Рис. 8. Обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції навколо осі *Ox*. Джерело: опрацювання власне**	1. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=1+x^2$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, навколо осі *Ox*. 2. Скласти дослідницьку задачу та описати правило-орієнтир для її розв'язування. 3. Продемонструвати утворення тіла обертання для криволінійної трапеції (використати опцію СДМ *«Залишати слід»).*
 **Рис. 9. Обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням фігури навколо осі *Oy*. Джерело: опрацювання власне**	1. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y=3-x^2$, $y=x^2+1$, навколо осі *Oy*. 2. Скласти дослідницьку задачу з використанням методу математичного моделювання (ММ) та описати правило-орієнтир для її розв'язування. *Вказівки до розв'язування:* реалізація всіх етапів математичного моделювання в процесі розв'язування дослідницької задачі (див. Рис 9) розглядається на конкретних прикладах, запропонованих у дослідженні (Гриб'юк, 2010).

Таблиця 11

Завдання для індивідуальної та групової роботи в процесі дослідницького навчання учнів

 **Рис. 10. Моделювання параметрів крони дерева у насадженнях в умовах лісостепу України. Джерело: опрацювання власне**	**Матеріали для бесіди**: *Кронам дерев належать важливі екологічні функції (шумопоглинача, оздоровчі, оптимізатора мікроклімату, природничого фільтра). Листя та задерев'янілі пагони є компонентами крони, що формують асиміляційний апарат дерева, який в процесі фотосинтезу нагромаджує органічну масу за рахунок депонування та акумулювання вуглецю, виділяючи кисень в атмосферу. У літній день 1га лісу поглинає 220-275 кг* CO_2*, створюючи при цьому 120-150 кг нової сухої фітомаси, відповідно виділяє 180-215 кг кисню. Крона дерева становить 20-25% від загальної фітомаси дерева.* **Обчислити об'єм крони дерева.** Скласти дослідницьку задачу та описати правило-орієнтир для її розв'язування.
 **Рис. 11. Вказівки до розв'язування задачі. Моделювання параметрів крони дерева у насадженнях в умовах лісостепу України. Джерело: опрацювання власне**	1. Скласти дослідницьку задачу та описати правило-орієнтир для її розв'язування з використанням: а) методу від супротивного; б) методу аналогії; в) методу варіації; г) методу універсальності; д) методу використання фундаментальних законів природи, фізики, біології, розвитку суспільства. 2. Результати дослідження необхідно продемонструвати з врахуванням методу Сократа.

Процес створення інструментів в СДМ *GeoGebra* легко засвоюється учнями та вчителями. Необхідно попередньо побудувати динамічне креслення об’єкта з бібліотеки (рівнобедрений трикутник, прямокутний трикутник, паралелограм, прямокутник, трапеція та ін.), а потім з використанням функціоналу «Інструменти» обрати функцію «Створити інструмент». В діалоговому вікні виконати три кроки: 1) вказати вихідний об’єкт; 2) вказати характеристичний набір вхідних об’єктів; 3) прописати назву нового інструменту та правило-орієнтир для можливості подальшого його використання (обрати необхідну іконку). В процесі побудови рівностороннього трикутника передбачено використання набору інструментів: *1) Коло з центром і точкою, Переріз об’єктів, Многокутник; 2) Точка, Поворот навколо точки, Многокутник; 3) Коло з центром і радіусом, Дотична, Промінь, Переріз об’єктів, Многокутник* (Гриб’юк, 2014).

Для перевірки результатів розв’язування дослідницької задачі та побудови в *GeoGebra* передбачена можливість виведення на екран монітора протоколу. Додаткові елементи побудови можна вилучити з креслення, або змінити стиль подання моделі. Такі можливості важливі для підтримки розвитку математичного сприймання, з використанням яких учні можуть концентрувати увагу лише на вагомих елементах та видозмінювати набір інструментів та функціоналу в процесі розвитку ідеї задачі та розв’язування дослідницької задачі. Рекомендується акцентувати увагу учнів на довільно заданих елементах креслення (функціональні залежності, надбудови, добудови та ін.) завдяки використанню кольорової візуалізації моделей.

В процесі навчання шкільного курсу геометрії в рамках дослідження (Гриб’юк, 2019а) з використанням комп’ютеризованої геометричної системи виокремлюємо три види моделей: *інтуїтивна модель* – ґрунтується на суб’єктивному досвіду учнів; *теоретична модель* – сформульована і доведена з використанням дедуктивного методу; *динамічна модель* – створена з використанням комп’ютеризованої динамічної математичної системи.

Використання індивідуальних творчих завдань в процесі дослідницького навчання учнів математики.

Із врахуванням розвитку дослідницького мислення учнів ускладнюються ситуації, за яких учні можуть відмовитися від реального експериментування з використанням матеріальних і комп’ютерних моделей математичних об’єктів і перейти до мисленнєвого експериментування (канторівський тип). Рекомендується використовувати систему динамічної математики *GeoGebra*, суміщаючи при цьому введення геометричних понять з їх наочною візуалізацією в процесі засвоєння відповідних операцій під час виконання креслень. Наприклад, в класі учні працюють з використанням локальної версії *GeoGebra*. Кожен школяр виконує індивідуальне творче завдання (див. рис. 13-16 Таблиці 12). Результатами роботи учні обмінюються з використанням дошки *Padlet (*https://padlet.com/dashboard*). Навчальні предмети:* Математика, алгебра, геометрія (планіметрія, стереометрія), креслення, інформатика (основи інформатики). *Багатофункціональність:* використовується в процесі навчання предметів математичного циклу (5-9 класи, 8-11 класи).

Мета: розвиток просторового та образного мислення учня; формування в учнів інтересу до виконання креслень; формування знань основних стандартів виконання креслень; формування вміння охайно виконувати геометричні побудови; ефективно виконувати креслення шляхом добору необхідного і достатньої кількості зображень під час виконання креслень. Приклади завдань наводяться нижче (див. Таблицю 12).

Таблиця 12

Картки для виконання учнями завдань реконструктивного та творчого характеру
в процесі дослідницького навчання предметів математичного циклу

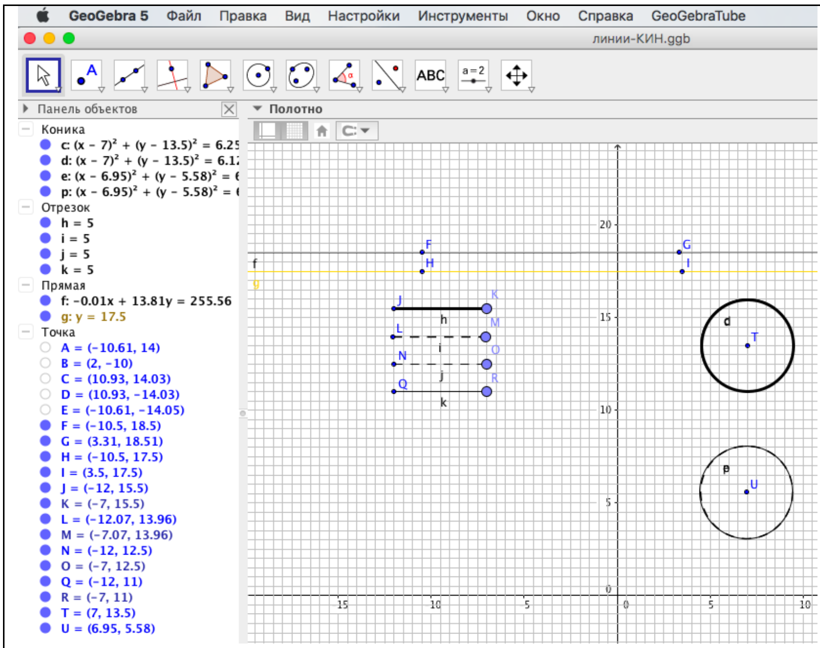


Рис. 13. Правила оформлення креслень. Джерело: опрацювання власне

Тема: Правила оформлення креслень Завдання 1 (рис. 14):

1. Описати правила оформлення геометричних креслень.
2. Виконати геометричні побудови.
3. Описати властивості об’єктів креслення.
4. Перерахувати елементарні графічні операції в СДМ *GeoGebra.*
5. Описати загальні принципи та прийоми побудови комплексного креслення.
6. Описати правило-орієнтир виконання 3D-моделювання.
7. Побудувати переріз. Описати загальні принципи та прийоми виконання завдання.

Вказівки до розв’язування: ґрунтовні приклади виконання розрахунково-графічних робіт розглядаються у дослідженні (Гриб’юк, 2019а).

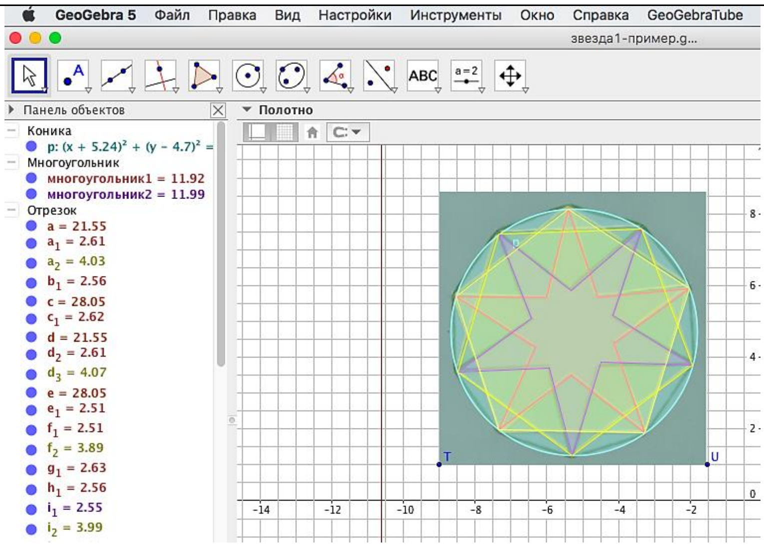


Рис. 14. Многокутники. Властивості ліній і фігур. Джерело: опрацювання власне

Тема: Многокутники. Властивості ліній і фігур.

Завдання 2 (рис.15):

1. Описати правила оформлення геометричних креслень.
2. Виконати геометричні побудови.
3. Описати властивості об'єктів креслення.
4. Перерахувати елементарні графічні операції в СДМ *GeoGebra.*
5. Описати загальні принципи та прийоми побудови комплексного креслення.
6. Описати правило-орієнтир виконання 3D-моделювання.
7. Побудувати переріз. Описати загальні принципи та прийоми виконання.

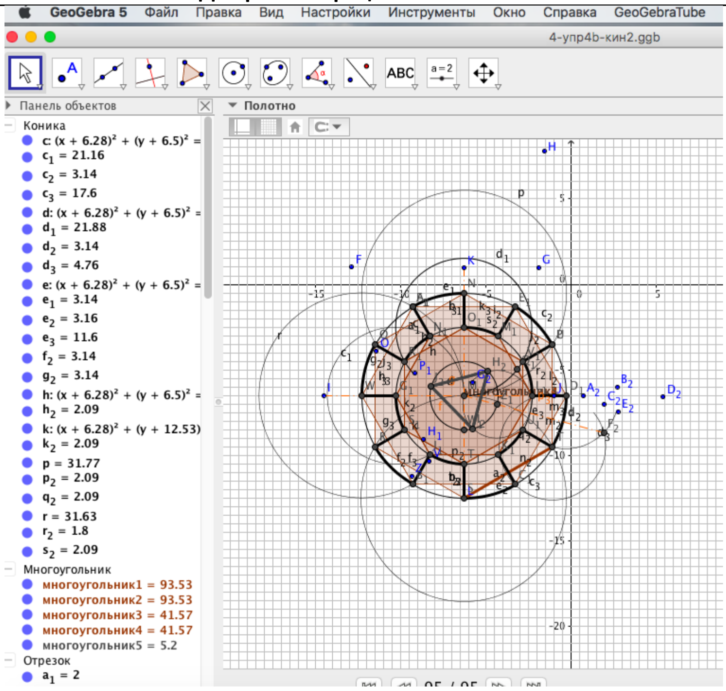


Рис. 15. Креслення плоскої деталі. Поділ кола на частини. Джерело: опрацювання власне

Тема: Креслення плоскої деталі. Поділ кола на частини.

Завдання 3 (рис.16):

1. Описати правила оформлення геометричних креслень.
2. Виконати геометричні побудови.
3. Описати властивості об'єктів креслення.
4. Перерахувати елементарні графічні операції в СДМ *GeoGebra.*
5. Описати загальні принципи та прийоми побудови комплексного креслення.
6. Описати правило-орієнтир виконання 3D-моделювання.
7. Побудувати переріз. Описати загальні принципи та прийоми виконання.

Вказівки до розв'язування: ґрунтовні приклади виконання розрахунково-графічних робіт (в т.ч. із використанням МММ) розглядаються у дослідженні (Гриб'юк, 2019a).

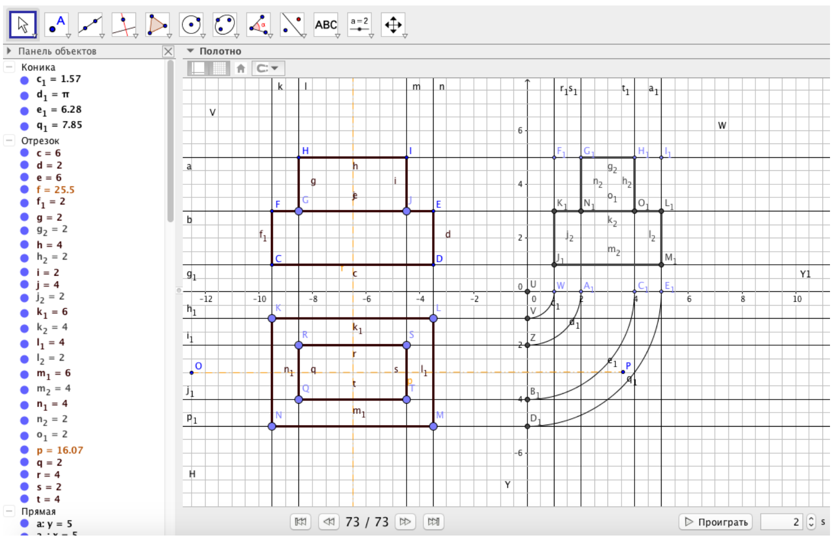


Рис. 16. Комплексне креслення. Джерело: опрацювання власне

Тема: Комплексне креслення.

Завдання 4 (рис. 17):

1. Описати правила оформлення геометричних креслень.
2. Виконати геометричні побудови.
3. Описати властивості об'єктів креслення.
4. Перерахувати елементарні графічні операції в СДМ *GeoGebra.*
5. Описати загальні принципи та прийоми побудови комплексного креслення.
6. Описати правило-орієнтир виконання 3D-моделювання.
7. Побудувати переріз. Описати загальні принципи та прийоми виконання.

Процес створення креслень, який потребує додаткових знань та вмінь, ефективної реалізації міжпредметних зв'язків у навчанні математики, перетворюється на дослідницьку задачу, яка вирішується учнями за наявності експертної підтримки з боку вчителя в позаурочний час (Гриб'юк, 2010). Безперечно, готові креслення потрібно використовувати на уроках в обмеженому об'ємі, оскільки вони підміняють процес дослідницького мислення учнів безпосередніми спостереженнями за поведінкою моделі.

ОБГОВОРЕННЯ

Чи можна уявити хірурга під час оперативного втручання без скальпеля, або стверджувати, що цей інструмент не має значення в ефективній лікарській практиці? Вчителі теж мають професійно, ефективно і результативно, педагогічно виважено і методично вмотивовано використовувати усі можливі інструменти для підвищення інтелектуального рівня і мотивації школярів, покращення рівня дослідницького навчання та математичного виховання учнів. Процес розвитку інтелектуального та гнучкого навчання учнів із використанням СДМ триває досі та їх можливості зростають. Не можна заперечувати актуальність використання традиційних технологій навчання.

Поліаспектність дослідницького навчання учнів з використанням компонентів КОМСДН (в т.ч. комп'ютерного моделювання) поєднує інформаційний, психологічний і дидактичний аспекти. Під *інформаційним аспектом* розуміється: можливість отримання нових відомостей; реалізацію добору навчального матеріалу та інших відомостей; розвиток інформаційної культури учнів.

Психологічний аспект реалізації можливостей використання компонентів КОМСДН (в т.ч. комп'ютерного моделювання) в процесі навчання учнів відображає: особливий характер взаємовідносин учня з навколишнім середовищем із врахуванням добору варіативного підходу щодо побудови учбової діяльності; широку можливості реалізації індивідуального підходу під час навчально-виховного процесу; вплив на пізнавальну обізнаність школярів; психічні особливості сприйняття, пам'яті, мислення, уяви; нові можливості комунікативної організації дослідницького навчання.

Дидактичний аспект щодо використання окремих компонентів КОМСДН (в т.ч. комп'ютерних моделей) в школі полягає в тому, що з'являється можливість: реалізовувати основні дидактичні принципи навчання; використовувати різноманітні форми організації навчально-виховного процесу; розробляти і реалізовувати цілі дослідницького навчання; добирати зміст навчального матеріалу у відповідності з доцільністю та педагогічно виваженим використанням комп'ютерних моделей; отримати нові результати навчання учнів.

Переваги використання комп'ютерного моделювання: вільнопоширюване і доступне у використанні; можливе проектування і створення об'єктів, які в реальних умовах неможливі (не існують); можливе прогнозування результатів експериментів; знаходження оптимальної форми і конструкції без створення пробних деталей; експериментування без ризику для здоров'я людини та навколишнього середовища; можливість огляду об'єкта з різної перспективи. *Недоліки використання комп'ютерного моделювання* полягають у помилковому твердженні про те, що з використанням моделювання можна якісно виявити нові явища, оскільки потрібне підтвердження в реальних умовах і в реальних експериментах. Модельний аналіз зменшує можливі пояснення.

У дослідженні знайдені кореляції між показниками переваги у ставленні учнів до використання окремих інформаційних ресурсів і рівнями інтелектуального розвитку учнів для окремих груп інформаційних ресурсів. Параметри використовуються для здійснення коригування методики дослідницького навчання з метою педагогічно доцільного та методично вмотивованого добору навчальних ресурсів для мінімізації протиріч з врахуванням рівнів інтелектуального розвитку учнів, характерними для конкретної групи учнів (класу) (Гриб'юк. 2020). Результати експериментального дослідження із використанням компонентів КОМСДН в контексті вивчення особистісних параметрів загальних і спеціальних здібностей учнів виявилися значущими на рівні достовірності ($p \leq 0{,}05$) (Гриб'юк, 2020).

Серед усіх моделей навчання в закладах загальної середньої освіти виокремлюється дослідницьке навчання, що дозволяє використовувати накопичений позитивний досвід здійснення традиційного навчання, доповнюючи його сучасними технологічними інноваціями. Вчителі підтримують відносини з кожним учнем в процесі дослідницького навчання з використанням компонентів КОМСДН, намагаючись уникати асиметрії. Всі учасники навчально-виховного процесу обмінюються ідеями, а вчитель координує автономію учнів. В результаті учні долають труднощі, в тому числі на психологічному рівні (наприклад, невпевненість у собі). Обов'язковою умовою є заохочення відкритості з боку школярів, тому успішність дослідницького навчання вимагає присутності вчителя, інакше співпрацю учнів без наставника не можна називати навчанням (Гриб'юк, 2019c). Психологічне забезпечення такого навчання включає наступні компоненти: обговорення творчої уяви учнів у практичній і творчій діяльності; створення комфортної, доброзичливої атмосфери на заняттях; застосування індивідуальних, групових форм навчання; розвиток комунікативних навичок учнів; розвиток інтелектуального рівня школярів; формування знань учнів на різних психологічних рівнях (Гриб'юк, 2019a).

Аналіз результатів експериментального дослідження дає підстави стверджувати, що в режимі дослідницького навчання (з участю вчителя) моральна, психологічна підтримка важливіша, наприклад для слабких учнів, ніж необхідність пояснення теоретичного матеріалу курсу. Перевагою дослідницького навчання є можливість вчителів взаємодіяти з кожним учнями в ході розв'язування дослідницьких завдань і заохочувати співробітництво між окремими учнями (в разі потреби). Безперечно, експеримент, в тому числі науковий експеримент є важливим засобом наукового пізнання. З використанням КОМСДН за участі вчителя та учнів, в тому числі з педагогічно виваженим використанням компонентів КОМСДН, долається психологічний бар'єр між вчителем і учнем, що підтверджує пріоритетну участь учня в навчанні і ґрунтовне розуміння предметів математичного циклу в теоретичному і практичному аспектах.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

В свідомості учнів виникає так званий *когнітивний дисонанс, своєрідний «експериментально-теоретичний розрив»*. Йдеться про зниження мотивації до дедуктивного доведення, знижується зацікавленість теоретичним пошуком. Безперечно, використання комп'ютерних досліджень та експериментів в процесі навчання математики в школі має бути педагогічно виваженим та методично вмотивованим. Вчитель повинен формулювати дослідницьку задачу таким чином, щоб *розумова діяльність учня не могла підмінятись комп'ютером*. Відповідно, використання СДМ Geogebra сприяло інтелектуальному розвитку учнів, про що свідчать результати експериментального дослідження (Гриб'юк, 2020).

Існування позитивних і негативних моментів різних форм традиційного навчання, демонстрація тісної інтеграції між різними видами діяльності в класі з використанням КОМСДН доводить необхідність розвитку відносин між школярами (за підтримки вчителя) в класі. Крім того, вчитель виступає в ролі посередника для проведення семінарів, лекцій, уроків із врахування психолого-педагогічних особливостей учнів, стимулює участь учнів в обговореннях, в наукових форумах і конференціях. З метою підтримки різних потреб учнів вчитель використовує дослідницькі завдання, відповідні форми роботи в рамках дослідницького навчання математики. Результати експериментів доводять, що в процесі дослідницького навчання школярі займаються активніше та з більшою цікавістю, в тому числі ефективніше виконують лабораторні практикуми, розв'язують дослідницькі задачі, розрахунково-графічні роботи (Гриб'юк, 2017; Гриб'юк, 2019). Але найскладніші завдання учні вирішують в класі з обов'язковою допомогою вчителя. В процесі дослідницького навчання учнів математики використання СДМ Geogebra і компонентів КОМСДН в навчальному процесі сприяє доповненню дедуктивно-абстрактного аналітичного підходу синтетичним методом пояснення навчального матеріалу, сприяє розвитку збалансованої взаємодії лівої і правої півкуль головного мозку в процесі розв'язування математичних задач.

Планується подальше уточнення окремих компонентів КОМСДН учнів предметів природничо-математичного циклу, що відповідають контексту педагогічних завдань профільної школи, з метою підвищення ефективності процесу навчання предметів природничо-математичного циклу у школі та забезпечення інтелектуального розвитку учнів.

Список використаних джерел

1. Беспалько В.П. *Образование и обучение с участием компьютеров (педагогика третьего тысячелетия).* М.: Изд-во Моск. психол.-социал. ин-та ; Воронеж: МОДЭК, 2002. 352 с.
2. Blomhoj M., Jensen T.H. Developing mathematical modelling competence. *Conceptual clarification and educational planning, Teaching Mathematics and its applications*, 2003. 22 (3). P. 123–139.
3. Гриб'юк О. О. *Дослідницьке навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з використанням комп'ютерно орієнтованих методичних систем:* монографія. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019а.
4. Hrybiuk O. Problems of expert evaluation in terms of the use of variative models of a computer-oriented learning environment of mathematical and natural science disciplines in schools. *Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Seria: Organizacja i Zarządzanie, Zeszyt Nr 79,* Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej (WPP), 2019b, 101-119. ISSN 0239-9415.
5. Гриб'юк О.О. Перспективи впровадження варіативних моделей комп'ютерно орієнтованого середовища навчання предметів природничо-математичного циклу у загальноосвітніх навчальних закладах України. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна* / редкол.: П.С. Атаманчук (голова, наук. ред.). Випуск 22: Дидактичні механізми дієвого формування компетентнісних якостей майбутніх фахівців фізико-технологічних спеціальностей, Кам'янець-Подільський. Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. С. 184-190.
6. Гриб'юк О.О. *Математичне моделювання при навчанні дисциплін математичного та хіміко-біологічного циклів:* навчально-методичний посібник для учителів. Рівне: РДГУ, 2010. 207 с.
7. Hrybiuk O. Mathematical modeling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry. *Proceedings of the First International conference on Eurasian scientific development. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH*. Vienna. 2014. P. 46-53.
8. Гриб'юк О.О. Психолого-педагогічні вимоги до комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики в контексті підвищення якості освіти. *Гуманітарний вісник ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет імені Григорія Сковороди»*. Додаток 1 до Вип. 31, Том IV (46): Тематичний випуск «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». Київ: Гнозис, 2013. С. 110-123.
9. Гриб'юк О.О. Вплив інформаційно-комунікаційних технологій на психофізіологічний розвиток молодого покоління. *"Science", the European Association of pedagogues and psychologists. International scientific-practical conference of teachers and psychologists "Science of future": materials of proceedings of the International Scientific and Practical Congress. Prague (Czech Republic), the 5th of March, 2014.* Publishing Center of the European Association of pedagogues and psychologists "Science", Prague, 2014, Vol.1. 276 p. P. 190-207.
10. Hrybiuk O. *Improvement of the Educational Process by the Creation of Centers for Intellectual Development and Scientific and Technical Creativity:* Hamrol A., Kujawińska A., Barraza M. (eds) Advances in Manufacturing II. MANUFACTURING 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2019c.: 370-382. Springer, Cham Online.
11. Гриб'юк О.О. Педагогічне проектування комп'ютерно орієнтованого середовища навчання дисциплін природничо-математичного циклу. *Наукові записки. Випуск 7. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 3.* Кировоград.: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2015. С. 38–50.
12. Гриб'юк О.О. Рівнева модель дослідницького навчання учнів математики з використанням комп'ютерно орієнтованої методичної системи. *Інформаційні технології і засоби навчання,* 2020. Том 77. № 3. С. 39-65.
13. Жалдак М.І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики. *Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Зб. наук. праць.* К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. Вип. 7. 2003. С.3–16.
14. *Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение:* коллективная монография. М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов и др. М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016. 300 с.
15. Takači D., Stankov G. and Milanovic I. Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Comput. Educ.* 82, 2015. P. 421–431.
16. Семеніхіна О. *В.* Використання програми GeoGebra в дослідженні функціональних залежностей (на прикладі розв'язування задач на екстремум). *Комп'ютер у школі та сім'ї,* 2015. Вип. 6. С. 17-24.

17. Ястребов А.В. *Обучение математике в вузе как модель научных исследований:* монография. МОН РФ, ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет имени К. Д. Ушинского». Ярославль: Ярославский гос. пед. ун-т им. К. Д. Ушинского, 2017. 306 с.

References

1. Bespal'ko, V.P. (2002). *Obrazovanie i obuchenie s uchastiem komp'juterov (pedagogika tret'ego tysjacheletija) [Education and Learning Involving Computers (Pedagogy of the Third Millennium)].* M.: Izd-vo Mosk. psihol.-social. in-ta ; Voronezh: MODJeK [in Russian].
2. Blomhoj, M. & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its applications,* 22 (3), 123–139 [in English].
3. Hrybiuk, O. O. (2019a). *Doslidnytske navchannia uchniv predmetiv pryrodnycho-matematychnoho tsyklu z vykorystanniam kompiuterno oriientovanykh metodychnykh system [Research Studying of Students of the Subjects of the Natural and Mathematical Cycle Using Computer-Oriented Methodological Systems]: monohrafiia.* Kyiv: NPU imeni M.P.Drahomanova [in Ukrainian].
4. Hrybiuk, O. (2019b). Problems of expert evaluation in terms of the use of variative models of a computer-oriented learning environment of mathematical and natural science disciplines in schools: *Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Seria: Organizacja i Zarządzanie,* Zeszyt Nr 79, pp. 101-119). Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej (WPP). ISSN 0239-9415 [in English].
5. Hrybiuk, O.O. (2016). Perspektyvy vprovadzhennia variatyvnykh modelei kompiuterno oriientovanoho seredovyshcha navchannia predmetiv pryrodnycho-matematychnoho tsyklu u zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladakh Ukrainy [Prospects of Introduction of Variational Models of Computer-Oriented Environment for Teaching Subjects of the Natural and Mathematical Cycle in Secondary Schools of Ukraine]. *Zbirnyk naukovykh prats Kamianets-Podilskoho natsionalnoho universytetu imeni Ivana Ohiienka. Seriia pedahohichna. 22: Dydaktychni mekhanizmy diievoho formuvannia kompetentnisnykh yakostei maibutnikh fakhivtsiv fizyko-tekhnolohichnykh spetsialnostei, 184-190.* Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi natsionalnyi universytet imeni Ivana Ohiienka [in Ukrainian].
6. Hrybiuk, O.O. (2010). *Matematychne modeliuvannia pry navchanni dystsyplin matematychnoho ta khimiko-biolohichnoho tsykliv [Mathematical Modeling in the Teaching of the Disciplines of Mathematical and Chemical-Biological Cycles]:* navchalno-metodychnyi posibnyk dlia uchyteliv . Rivne: RDHU [in Ukrainian].
7. Hrybiuk, O. (2014). Mathematical modeling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry. *Proceedings of the First International conference on Eurasian scientific development. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education* GmbH. Vienna, 1-2, 46-53. [in English].
8. Hrybiuk, O.O. (2013). Psykholoho-pedahohichni vymohy do kompiuterno-oriientovanykh system navchannia matematyky v konteksti pidvyshchennia yakosti osvity [Psychological and Pedagogical Requirements for Computer-oriented Systems of Teaching Mathematics in the Context of Improving the Quality of Education]. *Humanitarnyi visnyk DVNZ «Pereiaslav-Khmelnytskyi derzhavnyi pedahohichnyi universytet imeni Hryhoriia Skovorody». Dodatok 1 do Vyp.31, Tom IV (46): Tematychnyi vypusk «Vyshcha osvita Ukrainy u konteksti intehratsii do yevropeiskoho osvitnoho prostoru»,* 110-123. Kyiv: Hnozys [in Ukrainian].
9. Hrybiuk, O.O. (2014). Vplyv informatsiino-komunikatsiinykh tekhnolohii na psykhofiziolohichnyi rozvytok molodoho pokolinnia [The impact of information and communication technologies on the psychophysiological development of the younger generation]. *"Science", the European Association of pedagogues and psychologists. International scientific-practical conference of teachers and psychologists "Science of future": materials of proceedings of the International Scientific and Practical Congress. Prague (Czech Republic), the 5th of March, 2014.* Prague: Publishing Center of the European Association of pedagogues and psychologists "Science". Vol. 1. 190-207. [in Ukrainian].
10. Hrybiuk, O. (2019c). *Improvement of the Educational Process by the Creation of Centers for Intellectual Development and Scientific and Technical Creativity*: Hamrol A., Kujawińska A., Barraza M. (eds) Advances in Manufacturing II. MANUFACTURING 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering (pp. 370-382). Springer, Cham Online [in English].
11. Hrybiuk, O.O. (2015). Pedahohichne proektuvannia kompiuterno oriientovanoho seredovyshcha navchannia dystsyplin pryrodnycho-matematychnoho tsyklu [Pedagogical design of computer-based learning environment for natural sciences and mathematics]: *Naukovi zapysky. Vypusk 7. Seriia: Problemy metodyky fizyko-matematychnoi i tekhnolohichnoi osvity. Chastyna 3.* Kirovohrad: RVV KDPU im. V. Vynnychenka, 38–50 [in Ukrainian].
12. Hrybiuk, O.O. (2020). *The Variativ Model for Research Training for Math Students using Computer-oriented Methodical System.* Information Technologies and Learning Tools. (Vol 77. No 3. pp. 39-65) [in Ukrainian].
13. Zhaldak, M.I. (2003). Pedahohichnyi potentsial kompiuterno-oriientovanykh system navchannia matematyky [Pedagogical potential of computer-oriented systems of teaching mathematics*. Computer-oriented systems of teaching: kompiuterno-oriientovani systemy navchannia: Zb. nauk. prats.* Vyp. 7. Kyiv: NPU imeni M. P. Drahomanova, 3–16 [in Ukrainian].
14. Shabanova, M.V., Ovchinnikova, R.P. & Jastrebov, A.V. (2016). *Jeksperimental'naja matematika v shkole Issledovatel'skoe obuchenie [Experimental mathematics at school. Research training]*: kollektivnaja monografija. M.: Izdatel'skij dom Akademii Estestvoznanija [in Russian].
15. Takači D., Stankov, G. & Milanovic, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Comput. Educ.,* 82, 421–431 [in English].
16. Semenikhina, O.V. (2015). Vykorystannia prohramy GeoGebra v doslidzhenni funktsionalnykh zalezhnostei (na prykladi rozviazuvannia zadach na ekstremum) [Using GeoGebra in the study of functional dependencies (on the example of solving problems to the extreme)]. *Kompiuter u shkoli ta simi – Computer at school and family*, 6, 17-24 [in Ukrainian].
17. Jastrebov, A. V. (2017). *Obuchenie matematike v vuze kak model' nauchnyh issledovanij [Education in mathematics as a model of research]:* monografija. MON RF, FGBOU VO «Jaroslavskij gosudarstvennyj pedagogicheskij universitet imeni K. D. Ushinskogo». Jaroslavl' : Jaroslavskij gos. ped. un-t im. K. D. Ushinskogo [in Russian].

SYSTEM OF DYNAMIC MATHEMATICS OF GEOGEBRA AS A MEANS OF SUPPORTING GENERAL AND SPECIAL ABILITIES OF STUDENTS IN THE PROCESS OF RESEARCH LEARNING: PRACTICAL WORK EXPERIENCE

Olena Hrybiuk

Institute of Information Technologies and Learning Tools of NAES of Ukraine
National Pedagogical Dragomanov University, Ukraine

Abstract.

Formulation of the problem. *Dynamic mathematics GeoGebra is not used only in the process of learning in institutions of higher education, but while teaching school mathematics. The reform of the modern school has set teachers the task of the practical orientation of teaching subjects of the mathematical cycle. To solve this problem it is necessary: to ensure the completeness, consistency, and awareness of the foundations of scientific knowledge, their strength and effectiveness; to acquaint students with the basic methods of knowledge of nature by observation and experiment; to teach them to recognize the physical, chemical, and similar phenomena and patterns in nature and technology; to teach to use knowledge to explain and study the phenomena of nature, to develop research thinking using SDM, innovative teaching technologies.*

Materials and methods. *To achieve the goal of the study, empirical methods were used: observation of the educational process of students during their teaching of mathematics, analysis of the results of students' academic achievements. A set of methods of scientific cognition was effectively used: a comparative analysis to clarify different views on the problem and determine the direction of research; systematization and generalization to formulate conclusions and recommendations; generalization of the author's pedagogical experience and observations in the framework of experimental research. A differential-integration approach was used, taking into account the theoretical and experimental verification of research results, indicators of superiority in the attitude of students to the use of certain information resources, and levels of intellectual development.*

Results. *The study found a correlation between indicators of advantages in students' attitudes to using individual information resources and levels of the intellectual development of students to particular groups of information resources. Parameterization was used to carry out adjustments to the methodology of the research study with the purpose of pedagogically appropriate and methodologically motivated selection of learning resources in the context of minimization of contradictions concerning levels of the intellectual development of pupils, specific groups of students (class). The results of an experimental study using a computer-oriented methodical system of research training in the context of the study of the personal components of General and special abilities of pupils were significant at confidence level. SDM the use of GeoGebra in the study is addressed in several areas: clarification of terminology and mechanisms of the instruments in the context of a system of concepts and statements of a school course of mathematics and mathematical disciplines in institutions of higher education in the context of continuous education; expanding the range of mathematical disciplines and systems research tasks, design graphics tasks in support of the resolution which is used SDM GeoGebra; expansion of possibilities of export and import of educational material in the framework of the research training of students; increasing the availability of GeoGebra at different levels of technical support to students. The advantages and disadvantages regarding the use of the Geogebra are considered in the context of learning and teaching activities, to support which they are intended.*

Conclusions. *Possibilities of using GeoGebra in the process of research training of students of mathematical cycle subjects with pedagogically balanced use of COMSDL components are considered. Assessing the advantages and disadvantages of using GeoGebra is subjective, as the positive aspects and negative consequences of using GeoGebra are determined by the teacher's ability to methodically motivated and pedagogically balanced to use the components of COMSDN in the educational process. The research materials will be useful for teachers of mathematics, teachers, and students of pedagogical universities, students of postgraduate pedagogical education, and anyone interested in mathematical education.*

Keywords: *computer-oriented methodical system of research training, modeling, intellectual development, KOMSRL, pedagogical design, research training, GeoGebra.*