Scientific journal
**PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION**
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА**
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

*Ковальчук М.Б. Алгоритмізація як метод формування понять вищої математики. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 2(24). С. 66-73.*

*Kovalchuk M. Algorithmization as a method of higher mathematics concepts formation. Physical and Mathematical Education. 2020. Issue 2(24). P. 66-73.*

**DOI 10.31110/2413-1571-2020-024-2-009**
**УДК 004: 37**

**М.Б. Ковальчук**
*Вінницький національний технічний університет, Україна*
*maya.kovalchuk@gmail.com*
*ORCID: 0000-0002-1895-1715*

# АЛГОРИТМІЗАЦІЯ ЯК МЕТОД ФОРМУВАННЯ ПОНЯТЬ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

*АНОТАЦІЯ*

***Формулювання проблеми.*** *Кожна наука і кожний навчальний предмет оперує певним колом властивих їм понять. Модель вивчення понять впливає на формування знань студентів і рівень їх засвоєння. Вища математика традиційно вважається одним з найважчих предметів у технічних університетах. Зважаючи на сучасні тенденції в інформаційному суспільстві, однією із важливих компонентів успішної професійної діяльності майбутнього інженера є алгоритмічна діяльність. Тому на сьогодні актуальним є формування математичних знань і вмінь на основі алгоритмізації.*

***Матеріали і методи дослідження.*** *Методами дослідження виступили спостереження, аналіз та систематизація накопиченої інформації про доцільність використання алгоритмізації при формуванні понять вищої математики. Також задіяно емпіричний аналіз та метод моделювання для розробки алгоритмів у практиці навчання математики.*

***Результати.*** *Подано основні підходи до алгоритмізації процесу навчання. Здійснено класифікацію алгоритмів залежно від виду навчальної діяльності та диференційованого підходу в навчанні. Обґрунтовано доцільність використання алгоритмічного підходу в теорії та практиці навчання математики.*

***Висновки.*** *Використання алгоритмів та алгоритмічного підходу в навчанні математики сприяє свідомому сприйняттю математичного матеріалу, забезпечує лаконічність, точність і впорядкованість розумових операцій та позитивно впливає на якість засвоєних інформатико-математичних знань.*

*КЛЮЧОВІ СЛОВА:* *алгоритмізація навчання, математичні поняття, інформатизація освіти, методи інформатики, логіко-алгоритмічні знання, алгоритм.*

## ВСТУП

Запити інформаційного суспільства, швидкий розвиток технічних засобів та програмного забезпечення вимагають постійного удосконалення вищої технічної освіти. Це стосується не лише оснащення освітніх установ сучасною комп'ютерною технікою, а й значною мірою переосмислення усталених підходів до навчання класичних курсів, зокрема, курсу вищої математики.

Кожна наука і кожна навчальна дисципліна оперує певним колом властивих їй понять. Поняття є однією з головних складових змісту будь-якого предмета, в тому числі і предметів математичного циклу. Термін «поняття» звичайно вживається для позначення розумового образу певного класу об'єктів, процесів об'єктивної реальності або нашої свідомості. Математичні поняття відображають у нашому мисленні просторові форми та кількісні відношення дійсності, абстрагуючись від реальних ситуацій. Повноцінне вивчення математичних понять систематизує знання студентів і сприяє кращому засвоєнню предмета, а першочергова задача викладача математики при вивченні будь-якої теми полягає у формуванні поняттєвого апарату теми.

Проблема формування понять давно привертає увагу психологів і педагогів. В методиці навчання математики засвоєння понять розглядалися в дослідженнях О. Г. Євсеєвої, В. Г. Бевз, В. О. Далінгера, П. М. Ерднієва, Ю. М. Колягіна, Г. Л. Луканкіна, А. М. Пишкало, Г. І. Саранцева, С. П. Семенця, О. І. Скафи, З. І. Слепкань, Н. А. Тарасенкова, В. О. Швеця та ін. Формування та засвоєння математичних понять відбувається у процесі розумової (аналітико-синтетичної) діяльності студентів, яка передбачає як загальні (аналіз, синтез, порівняння, зіставлення, абстрагування, узагальнення тощо), так і специфічні розумові дії (дія підведення під поняття і обернена їй дія – виведення наслідків). Через зазначені дії відбувається керування формуванням понять та здійснюється організація розумової діяльності студентів у процесі навчання.

Одним із ефективних методів організації розумової діяльності, на думку Б. В. Бірюкова, Л. Н. Ланди, Н. Ф. Тализіної, Л. М. Фрідмана та інших, є алгоритмізація навчання. це спрямовує наукові пошуки до визначення шляхів використання алгоритмізації (алгоритмічного підходу) у формуванні математичних понять на заняттях з вищої математики.

**Мета статті** полягає в обґрунтуванні доцільності використання алгоритмізації як методу формування понять вищої математики.

## МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення мети використано низку теоретичних та емпіричних методів: спостереження і аналіз для систематизації накопиченої інформації про доцільність використання алгоритмізації при формуванні понять вищої математики, аналіз та моделювання - для розробки й використання моделей використання алгоритмізації у теорії та практиці навчання математики.

## РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Результати дослідження показали, що в навчальному процесі найпоширенішими є алгоритми функціонування і управління. У зв'язку з цим доцільно розглядати два підходи до алгоритмізації навчального процесу:

– розв'язування задач за алгоритмічними приписами і складання алгоритмів з метою формування у студентів певних прийомів пізнавальної діяльності,

– організація процесу навчання під керівництвом викладача з метою управління пізнавальною діяльністю студентів.

Найчастіше складання алгоритму допомагає в засвоєнні і розумінні якогось поняття або теореми, а також при встановленні логічного ланцюжка розв’язування задачі, тому нами виділені:

1) алгоритми вивчення понять і доведення теорем (теоретичні алгоритми);

2) алгоритми розв’язування завдань (практичні алгоритми (*Демидович, 1973*).

У науковій літературі висвітлюється два підходи до визначення поняття "алгоритм": математичний і дидактичний. В даному дослідженні алгоритм розглядається як модель системи дій, яка визначає діяльність студентів з вирішення навчально-пізнавальних завдань з функціями: модель дій відповідно до змісту; засіб формування і розвитку знань і вмінь студентів; засіб реалізації методів навчання.

Формування понять базується на використанні двох типів алгоритмів: функціонування і управління. В межах даного дослідження на прикладі вивчення теми «Невизначений інтеграл» ми розглянемо застосування алгоритмів обох типів.

Поняття «невизначеного інтеграла» є одним з основних понять вищої математики, оскільки крім теоретичного має ще й велике прикладне значення. Відповідно до діяльності студентів поняття «невизначений інтеграл» містить теоретичну і практичну складову. Тому ми розглянемо: алгоритми на рівні формування понять; алгоритми на рівні теорій (доведення теорем); алгоритми на рівні формування вмінь (методи інтегрування).

Тепер детальніше розглянемо виділені алгоритми в навчанні на лекціях і практичних заняттях.

Спочатку виконаємо аналіз теоретичного матеріалу (табл. 1).

*Таблиця 1*

**Аналіз формулювань означень понять теми «Невизначений інтеграл»**

| № | Поняття | Факти | Формулювання означень | Способи діяльності | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Первісна | Основна властивість первісної.<br><br>Теорема про суму первісних. | Функцію $F(x)$ називають первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх $x$ із цього проміжку $F'(x)=f(x)$. | Знаходження первісних. | Відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності. |
| 2 | Невизначений інтеграл | Теорема про первісну від добутку функції і константи.<br><br>Теорема про первісну від складеної функції. | Сукупність усіх первісних функції $y=f(x)$ на проміжку $I$ називається невизначеним інтегралом і позначається $\int f(x)dx$ . | Знаходження невизначених інтегралів. | Відпрацювання операцій, які входять у спосіб діяльності.<br><br>Застосування способу діяльності (різні рівні). |

Першим поняттям, з якого починається вивчення теми «Невизначений інтеграл», є первісна. Актуалізацію поняття первісної доцільно почати з взаємно обернених операцій, які вже відомі студентам зі шкільного курсу математики: додавання – віднімання, множення – ділення, піднесення до степеня – добування кореня. Оскільки диференціювання та інтегрування – взаємно обернені операції, то на етапі актуалізації знань необхідно повторити означення похідної та таблицю похідних, щоб потім вміти застосовувати її в оберненій послідовності, а далі на кількох прикладах згадати операцію диференціювання (для функції $f(x)$ знайти її похідну $f'(x)$) і поставити питання про зворотну операцію – знаючи похідну $f'(x)$ відновити функцію $f(x)$, яку диференціювали. Наприклад, похідна від якої функції дорівнює $3x^2$? Неважко здогадатися, що похідну $3x^2$ має функція $x^3$.Тобто, $x^3$ – це первісна для функції $3x^2$.

Після розгляду декількох прикладів на відтворення функції, слід ввести означення первісної: функція $F(x)$називається первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх $x$ з цього проміжку виконується рівність $F'(x)$=$f(x)$.

Слід звернути увагу студентів на те, що на відміну від похідної, яка спочатку визначалася в точці, а потім на проміжку, первісна відразу визначається на проміжку. Наступний крок полягає в тому, щоб показати, що операція інтегрування на відміну від операції диференціювання не однозначна, існує безліч первісних для даної функції, що відрізняються одна від одної на сталу величину $C$. Наприклад, первісною для функції $y$=6$x$ буде будь-яка функція виду $y$=3$x$2+$C$, так як $y$=(3$x$2+$C$)'=6$x$. Розв'язання таких вправ передбачає передусім свідоме відтворення означення поняття первісної для функції на поданому проміжку, а також схеми дій для перевірки того, чи є подана функція первісною для деякої функції на проміжку.

Перед доведенням основної властивості первісної слід розглянути ознаку сталої функції: для того, щоб диференційована на інтервалі функція була сталою, необхідно і достатньо, щоб на цьому інтервалі її похідна дорівнювала нулю.

Основну властивість первісної можна сформулювати так: якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку I та $C$ – довільне число, то функція $y$=$F(x)$+$C$ також є первісною функції $f(x)$ на проміжку *I*. З цієї властивості випливає, що графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат.

При знаходженні первісних, як і при знаходженні похідних, застосовуються правила: для первісної суми, про сталий множник, первісна для функції $f(kx+b)$, тобто:

1. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, $G(x)$ – первісна для $g(x)$, то $F(x)$+$G(x)$ – первісна для $f(x)$+$g(x)$.
2. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$ і $k$ – стала, то $k\cdot F(x)$ – первісна для $k\cdot f(x)$.
3. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$ і $k$,$b$ – сталі, то $F(kx+b)$ /$k$·– первісна для $f(kx+b)$.

Особливу увагу звертаємо на третю властивість, оскільки вона трохи складніша у застосуванні. В цьому випадку доцільно виділити *алгоритм* знаходження первісної функції $y$=$f(kx+b)$.

*Алгоритм 1*

*(алгоритм функціонування)*

1) знайти первісну $y$=$F(x)$ для функції $y$=$f(x)$;
2) у виразі для функції $y$=$F(x)$ аргумент $x$ замінити лінійним виразом ($k\cdot x+b$);
3) вираз з пункту 2) помножити на $\frac{1}{k}$.

Розглядати невизначений інтеграл слід з такого означення: невизначений інтеграл – це сукупність первісних для додатної функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx$, де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$–підінтегральний вираз.

Для початку потрібно навчитись знаходити інтеграл за допомогою таблиці невизначених інтегралів з перевіркою та на перших етапах навчання.

У процесі роботи студенти проводять операції порівняння, зіставлення, підведення під поняття. Тим самим готується ґрунт для оформлення алгоритму як завершального етапу заняття. При цьому мета складання схеми-алгоритму – систематизувати отриману на лекції інформацію, пов'язати теорію з практикою.

*Алгоритм 2*

*(алгоритм управління)*

*Алгоритм формування поняття «невизначений інтеграл».*

1) опорні знання (означення похідної, таблиця похідних);
2) приклади на відновлення функції за її похідною;
3) поняття первісної: розглядаємо приклади, які підводять під дане поняття; узагальнюючи результати наведених прикладів формулюємо означення первісної та невизначеного інтегралу;
4) прикладах на неоднозначність операції інтегрування на відміну від операції диференціювання;
5) ознака сталої функції;
6) основна властивість первісної;
7) правила інтегрування;
8) табличне інтегрування.

Слід зауважити, що введення понять та їх застосування відбувається не тільки на лекціях, але й на практичних заняттях та в процесі організації самостійної роботи студентів. Аналіз підручників і задачників з курсу вищої математики дозволяє виділити два основні підходи до розв'язування завдань – *формальний*, коли розв'язування ведеться на основі розроблених приписів, та *евристичний*, коли неможливо дати строгий припис, а доводиться обмежуватися лише загальними рекомендаціями, що дозволяють раціонально вести пошук розв'язків.

У процесі вивчення вищої математики практичні завдання відіграють велику роль. Їх розв'язування допомагає глибше зрозуміти теорію: розкрити зміст означень, показати тонкості, які завуальовані в формулюваннях і доведеннях теорем і т. д. До навчання через задачі закликають автори багатьох робіт (*Ткачьова, 1994; Утєєва, 1998; Федорков, 1988; Мумряєва, 2001; Віленкін, 1977*). При переході від теорії до практики, тобто при розв'язуванні завдань, існують об'єктивні труднощі. У науково-методичній літературі розглядаються різні підходи до навчання студентів розв'язуванню завдань. Ми зупинимося на одному з них. Основою даного підходу є розв'язування так званих типових завдань. Ідея полягає в тому, що можна відібрати певний мінімум завдань, оволодівши методами розв'язування яких, студент зможе розв'язати будь-яке завдання на рівні програмних вимог з досліджуваної теми. Оскільки, типові завдання передбачається використовувати при роботі з усіма студентами, то це буде комплекс завдань серед яких будуть і ті, алгоритм розв'язання яких відомий.

Хтось може заперечити, що якщо відомий алгоритм розв'язання, то це завдання завжди стандартне, а в літературі неоднноразово наголошується, що навчання алгоритмам слабо розвиває мислення студентів. Дійсно, зустрічається така точка зору, але це не так.

По-перше, в цьому твердженні міститься неточність, оскільки загальні методи (стосовно кожної конкретної теми) повинні спиратися на алгоритми розв'язання типових задач (без цього вони не працюють). По-друге, доцільність і важливість знайомства студентів з алгоритмами розв'язування різних завдань визначається тим, що формування в них алгоритмічної культури є одним із завдань вищої школи. Складання ж алгоритмів є творчою діяльністю, тому спільна діяльність викладача і студента на занятті по вибору, обґрунтуванню і систематизації алгоритмів розв'язування безумовно сприяє розумовому розвитку студентів а не гальмує його.

Нарешті, не потрібно забувати, що для розв'язування нестандартних математичних задач важливе значення має особистий досвід студента, який набутий ним в процесі навчання. Використання в подальшому цього досвіду в процесі пошуку методів розв'язування завдань особливо ефективно здійснюється шляхом впізнавання в нових завданнях послідовності ключових завдань (а ця діяльність не зводиться до алгоритмічної та безумовно свідчить про розвиток мислення студентів).

Існують різні методи обчислення невизначених і визначених інтегралів. Деякі з яких успішно лягають в алгоритмічну схему. Однак, будь-які задачі на обчислення інтеграла не можна віднести до типових, хоча для деяких з них скласти алгоритмічні приписи можливо. Далі мова піде про такі завдання.

Здавалося б, методика навчання розв'язуванню типових задач, які є основою для засвоєння вищої математики, має бути представлена в літературі досить добре. Однак аналіз вузівських задачників *(Дубовик, 2011; Васильченко, 1994; Давидов, Коровкін & Нікольський, 1997; Демідовіч, 1997; Єфімов & Демідовіч, 1993; Єфімов & Демідовіч, 1986; Єфімов & Поспєлов, 2002; Кононюк, 2009; Кривуца, Барковський & Барковська, 2005;* Курпа, Кашуба *& Лінник,2009; Курпа, Кирилова & Ліінник*, 2009*)* показує, що це зовсім не так. У кращому випадку автори розбивають конкретні приклади розв'язування задач певного типу, не даючи при цьому загальних рекомендацій і не виділяючи чітко послідовність дій. Що стосується підручників *(Дубовик, 2013; Васильченко, 2014; Васильченко, 1994; Кононюк, 2009; Овчінніков, Яремчук & Михайленко, 2007; Сенчук, 2003; Сенчук, 2006 )*, то вони дають вичерпні вказівки тільки до розв'язування окремих типів задач. Наприклад,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+6}}\ .$$

Після прочитання студенти пробують намітити наступну послідовність дій.

<u>*Алгоритм 3*</u>

*(алгоритм функціонування)*

1) в знаменнику дробу виділити повний квадрат двочлена;
2) позначити його (повний квадрат) за нову змінну;
3) перейти в підінтегральному виразі до нової змінної;
4) обчислити інтеграл;
5) у відповіді перейти до старої змінної.

Таким чином студент неявно створює в своїй свідомості алгоритм розв'язування завдань даного типу. Ми пропонуємо для слабких студентів проводити на перших порах повну деталізацію процесу розв'язування, тим самим підвищуючи рівень розвитку мотиваційного компонента.

Алгоритмічні приписи складаються таким чином, щоб кожен блок містив вказівки до виконання однієї елементарної операції. Поняття елементарної операції відносне. Все залежить від того, хто є виконавцем.

Елементарними операціями будемо називати ті математичні дії, які повинні бути на даний момент засвоєні більшістю студентів. Зокрема, це означає, що для основної більшості студентів, що приступають до обчислення інтегралів від найпростіших раціональних дробів, операції доповнення суми ($p^2 + px$) до повного квадрата двочлена, застосування табличних інтегралів і т.д. повинні бути елементарними.

На нашу думку, навчання розв'язуванню типових задач (навіть для слабких студентів) зводиться до двох проблем:

– повне засвоєння студентами виділених елементарних операцій;

– закріплення в свідомості певної їх послідовності, що веде до одержання бажаного результату.

Традиційно, важкими є завдання на заміну змінної інтегрування. Це пов'язано з наявністю елемента евристики, який полягає в тому, що перш ніж розв'язувати задачу, потрібно вибрати відповідну формулу і підвести під неї даний інтеграл.

Аналіз вузівських задачників показує, що обчислення інтегралів методом заміни змінної зводиться, в основному, до використання двох рівностей:

1) $\int f(ax+b)=\frac{1}{a}\int f(t)dt$ , де $t=ax+b$ ;

2) $\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'\left(x\right)dx=\int f(t)dt$ , де $t=\varphi(x)$

Рівність 1 є окремим випадком рівності 2. Вона виділяється тут лише в дидактичних цілях. Зауважимо, що мова зараз йде про найпростіші випадки заміни змінної. Ми не зачіпаємо ні тригонометричні підстановки, ні підстановки Ейлера, ні ті, які застосовуються у випадку інтегрування ірраціональностей і т. д.

Таким чином, аналіз задачників показує, що на початковому етапі проблема полягає в тому, щоб навчити студентів бачити ситуації, в яких потрібно застосовувати формулу 1 або 2.

Традиційне навчання інтегрування проходить без обов'язкового виділення в явному вигляді послідовності елементарних дій. Однак проведене дослідження показує, що використання елементів алгоритмізації надійніше і скоріше призводить до бажаного результату.

Відповідно до рівневої диференціації студентів в залежності від успішності в навчанні в таблиці 2 запропоновані різні типи алгоритмів.

*Таблиця 2*

**Класифікація алгоритмів залежно від виду навчальної діяльності та диференційованого підходу в навчанні**

| **Рівневі алгоритми** / **Алгоритми управління навчанням** | **Конкретні** | **Узагальнені** | **Спеціальні** |
|---|---|---|---|
| **Лекційні заняття** | студентам пропонується алгоритм вирішення конкретного навчального завдання | студентам пропонується алгоритм вирішення класу навчальних задач | студентам пропонується конструювання алгоритму |
| **Практичні заняття** | студенти використовують алгоритм вирішення конкретного завдання | студенти використовують алгоритм вирішення класу задач або доведення теорем | студенти за допомогою викладача конструюють алгоритми |
| **Самостійна робота** | студенти самостійно використовують алгоритм вирішення конкретного завдання | студенти самостійно використовують алгоритм вирішення класу задач або доведення теорем | Студенти самостійно конструюють алгоритми |

Доцільно також залучати самих студентів до побудови алгоритмічних приписів. Це сприяє вирішенню одного з найважливіших завдань процесу навчання - розвитку творчої діяльності студентів. Залучення студентів до самостійної побудови алгоритмічних приписів повинно проводиться не епізодично, а систематично. Так, після знаходження декількох прикладів на знаходження невизначеного інтеграла способом підстановки слід запропонувати студентам скласти припис алгоритмічного типу для знаходження невизначених інтегралів способом підстановки. Після цього розпорядження корегується, і його остаточний вигляд може бути таким.

<u>*Алгоритм 4*</u>

*(алгоритм функціонування)*

1) визначити вид табличного інтеграла;
2) визначити вид підінтегрального виразу, який необхідно замінити новою змінною;
3) знайти диференціал обох частин рівності, яка одержана в результаті введення нової змінної;
4) знайти вираз для диференціала попередньої змінної;
5) замінити попередню змінну шуканого інтеграла новою змінною;
6) знайти інтеграл, отриманий в результаті введення нової змінної;
7) в одержаному результаті замінити нову змінну попередньою.

Для закріплення цього алгоритму студентам пропонується розв’язати самостійно декілька прикладів на інтегрування способом підстановки.

Роль алгоритмів в навчанні математики дуже велика. Розв'язування задач за алгоритмом часто швидко і легко приводить до бажаного результату, тоді як незнання алгоритму може привести до численних помилок і великої втрати часу. Студенти, які добре засвоїли алгоритми розв’язування завдань, можуть оперувати згорнутими знаннями при розв’язуванні інших, складніших завдань. Засвоєні алгоритми допомагають звільнити свідомість від зайвої роботи і допомагають успішно розв’язувати завдання різного ступеня складності.

Автоматизувати деякі дії студентів можна через самостійне розв’язування алгоритмічних задач.

При виконанні завдань самостійної роботи алгоритмічного типу студенти здійснюють наступні дії:

– чітко виконують усі зазначені кроки для вирішення поставленої задачі;

– в процесі послідовного виконання всіх цих дій відтворюють необхідні знання і навички, отримані раніше.

Аналіз дій, які здійснюють студенти, дозволяє виділити вимоги до завдань, включених в даний тип самостійної роботи.

1. Проблема в завданні повинна бути сформульована.
2. Необхідно давати завдання з чітким зазначенням послідовності виконання всіх його кроків.
3. У формулюванні алгоритму повинні бути вказані необхідні формули та властивості, або посилання на них.
4. В умові повинно бути зазначено, які завдання або способи виконання слід застосувати.
5. Завдання цього типу містять відомості в межах однієї теми курсу.

Наведемо приклад таких завдань

<u>**1 рівень складності**</u>

1. Побудувати інтеграл, який можна знайти за допомогою заміни змінної і обчислити його.
2. Довести теорему: «Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох або декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$ », використовуючи наступний алгоритм:
   1) знайдіть похідну від лівої частини вказаної рівності;

2) знайдіть похідну від правої частини вказаної рівності;

3) використовуйте наступну властивість $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = f(x)$;

4) зробіть висновок про рівність похідних від лівої і правої частини рівностей;

5) запишіть висновок про доведення запропонованої теореми.

3. Записати алгоритм застосування методу інтегрування частинами (відповідь з використанням відомого алгоритму).

**2 рівень складності**

Довести теорему: «Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох або декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$ » на основі рівності похідних від лівої і правої частин рівності.

Знайти інтеграл $\int x^2 e^x dx$ методом інтегрування частинами.

**3 рівень складності**

Із наведених нижче доведень виберіть те, яке буде доведенням наступної теореми: «Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох або декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів».

Доведення 1.

Знайдемо похідну від лівої і правої частин, одержимо

$$\left(\int a\ f(x)dx\right)' = a\ f(x);$$

$$\left(\int a\ f(x)dx\right) = a\left(\int f(x)dx\right)' = a\ f(x).$$

Похідна від лівої і правої частин рівні, звідси випливає, що виконується вказана рівність.

Доведення 2.

Знайдемо диференціал добутку $UV$ за формулою $d(UV)=UdV+VdU$. Інтегруючи, одержимо $UV=\int UdV+\int VdU$ або $\int UdV=UV-\int VdU$ , що і потрібно було довести (можна замінити $U$ на $f_1$ , $V$ на $f_2$ .

Доведення 3. Наводиться коректне доведення даної теореми.

**4 рівень складності**

Сформулюйте теорему, проаналізувавши дане доведення.

Доведення.

Знайдемо похідні наступних рівностей

$$\left(\int [f_1(x) + f_2(x)]dx\right)' = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) + f_2(x)$$

Одержані похідні рівні між собою. Ми довели теорему.

## ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Алгоритми мають важливу функціональну властивість бути моделями розумової діяльності. Тому, маючи деякий зразок того, як треба міркувати і діяти в ході розв’язання завдань, студенти мають можливість регулювати процес власних розумових дій.

Формування понять вищої математики базується на використанні алгоритмів двох типів: функціонування та управління. Побудова та використання алгоритмів забезпечує лаконічність, точність і впорядкованість розумових дій студентів.

До напрямів подальших досліджень відносимо перевірку ефективності використання алгоритмів функціонування щодо формування операційних компонентів розумової діяльності студентів.

### Список використаних джерел


1. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб./ Дубовик В. П. та ін.; Київ: А.С.К., 2011. 480 с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак./ Дубовик В.П. та ін.; Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.
3. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі: навч. посіб. для студентів природ. ф-тів ун-тів і техн. ВНЗ: у 2 кн. Кн. 1. / за ред. І.П. Васильченко. Київ: Либідь, 1994 . 309 с.
4. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі: навч. посіб. для студентів природн. ф-тів ун-тів і техн. ВНЗ: у 2 кн. - Кн. 2 / за ред. І. П. Васильченко. Київ: Либідь, 1994. 277 с.
5. Виленкин Н.Я., Мордовии А.Г. Пределы, непрерывность. Пособие для учителей. Москва: Просвещение, 1977. 78 с.
6. Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н. Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие. Москва: Просвещение, 1973. 255 с.
7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие. – 18-е изд., испр. Москва: Изд-во Моск. Ун-та, ЧеРо, 1997. 624 с.
8. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Часть 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. Учеб. пособие для втузов. - 3-е изд., испр. Москва: Наука, 1993. 480 с.

9. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Часть 2. Специальные разделы математического анализа. Учебное пособие.–2-е изд. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 368 с.
10. Ефимов А. В., Поспелов А. С. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Часть 3. Учеб. пособие для втузов – 4-е изд., перераб. и доп. Москва: Издательство Физико-математической литературы, 2002. 576 с.
11. Кононюк А. Ю. Вища математика (модульна технологія навчання): навч. посіб.: [в 2 кн.]. Кн. 2. Київ: КНТ, 2009. 788 с.
12. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Київ: Центр навчальної літератури, 2005. 535 с.
13. Курпа Л. В., Кашуба Ж.Б., Лінник Г.Б. Вища математика в прикладах і задачах: у 2 т. Т.1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посібник / за ред. Л. В. Курпи. Харків: НТУ «ХПІ», 2009. 532с.
14. Курпа Л. В., Кириллова Н. О., Лінник Г. Б. Вища математика в прикладах і задачах: у 2 т. Т.2: Диференціальне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди: навч. посібник /за ред. Л. В. Курпи. Харків: НТУ «ХПІ», 2009. 432 с.
15. Мумряева С. М. Алгоритмический подход к изучению математического анализа в педвузе в условиях дифференцированного обучения: дис… канд. пед. наук.: 13.00.02. Саранск, 2001. 159 с.
16. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення /За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. П.М. Юрченка. К.: Техніка, 2007. 600 с.
17. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи/ За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. П.М. Юрченка. К.: Техніка, 2007. 792 с.
18. Сенчук Ю. Ф. Математический анализ для инженеров: учеб. пособие: [в 2 ч.]. Ч. 1. Нац. техн. ун-т "Харьков. политехн. ин-т". Харьков : НТУ "ХПИ", 2003. 408 с.
19. Сенчук Ю. Ф. Математический анализ для инженеров: учеб. пособие: [в 2 ч.]. Ч. 2. Нац. техн. ун-т "Харьков. политехн. ин-т". Харьков: НТУ "ХПИ", 2006. 376 с.
20. Ткачева М. В. Реализация в обучении математике многомерной модели дифференциации образования: автореф. дис...докт. пед. наук: 13.00.02. Москва, 1994. 50 с.
21. Утеева Р. А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: дис... канд. пед. наук: 13.00.02. Москва, 1998. 363 с.
22. Федорков И. М. Воспитание учебно-познавательной самостоятельности у студентов в процессе изучения естественно-математических наук: автореф. дис... канд. пед.наук: 13.00.01. Минск, 1988. 19 с.

**References**

1. Dubovyk, V. P. et al (2011). Vyshcha matematyka. Zbirnyk zadach : navch. posib. *[Higher mathematics. Collection of tasks].* Kyiv: A.S.K. [in Ukraine].
2. Dubovyk, V. P. et al (2013). Vyshcha matematyka: navch. posib. dlia stud. vyshch. navch. zak *[Higher mathematics]*. Kyiv : Ihnateks-Ukraina [in Ukraine].
3. Vasylchenko, I. P. (Ed.). (1994). Vyshcha matematyka. Osnovni oznachennia, pryklady i zadachi: navch. posib. dlia studentiv pryrod. f-tiv un-tiv i tekhn. VNZ: u 2 kn. Kn. 1 *[Basic definitions, examples and tasks].* Kyiv : Lybid [in Ukraine].
4. Vasylchenko, I. P. (Ed.). (1994). Vyshcha matematyka. Osnovni oznachennia, pryklady i zadachi: navch. posib. dlia studentiv pryrod. f-tiv un-tiv i tekhn. VNZ: u 2 kn.- Kn. 2 *[Basic definitions, examples and tasks]*. Kyiv : Lybid [in Ukraine].
5. Vilenkin, N.. Ja. & Mordovii, A. G. (1977). Predely, nepreryvnost'. Posobie dlja uchitelej [*Limits, continuity. Teacher's manual*]. Moskva: Prosveshhenie [in Russian].
6. Davydov, N. A., Korovkin, P. P. & Nikol'skij, V. N. (1973). Sbornik zadach po matematicheskomu analizu : uchebnoe posobie *[Collection of problems in mathematical analysis: a textbook]*. Moskva: Prosveshhenie [in Russian].
7. Demidovich, B. P. (1997). Sbornik zadach i uprazhnenij po matematicheskomu analizu: Ucheb. posobie. – 18-e izd., ispr *[Collection of problems and exercises in mathematical analysis: Textbook].* Moskva: Izd-vo Mosk. Un-ta, CheRo [in Russian].
8. Efimov, A.V. & Demidovich, B.P.(1993). Sbornik zadach po matematike dlja vtuzov. V 4-h chastjah. Chast' 1. Linejnaja algebra i osnovy matematicheskogo analiza. Ucheb. posobie dlja vtuzov. - 3-e izd., ispr.*[ Collection of problems in mathematics* for universities. In 4 parts. Part 1. Linear algebra and basics of mathematical analysis]. Moskva: Nauka [in Russian].
9. Efimov, A.V. & Demidovich, B.P. (1986). Sbornik zadach po matematike dlja vtuzov. V 4-h chastjah. Chast' 2. Special'nye razdely matematicheskogo analiza. Uchebnoe posobie.–2-e izd [Collection of problems in mathematics for universities. In 4 parts. Part 2. Special sections of mathematical analysis]. Moskva: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. [in Russian].
10. Efimov, A. V. & Pospelov, A. S. (2002). Sbornik zadach po matematike dlja vtuzov. V 4 chastjah. Chast' 3. Ucheb. posobie dlja vtuzov –4-e izd., pererab. i dop [Collection of problems in mathematics for universities. In 4 parts. Part 3]. Moskva: Izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoj literatury [in Russian].
11. Kononiuk, A. Yu. (2009). Vyshcha matematyka (modulna tekhnolohiia navchannia): navch. posib.: [v 2 kn.]. Kn. 2 [Higher mathematics (modular learning technology)]. Kyiv: KNT [in Ukraine].
12. Kryvutsa, V. H., Barkovskyi, V. V. & Barkovska, N. V.(2005). Vyshcha matematyka: praktykum: navch. posib. dlia stud. vyshch. navch. Zakl [Higher mathematics: practicum]. Kyiv: Tsentr navchalnoi literatur [in Ukraine].
13. Kurpa, L.V., Kashuba, Zh.B. & Linnyk, H.B. (2009). Vyshcha matematyka v prykladakh i zadachakh: u 2 t. T.1: Analitychna heometriia ta liniina alhebra. Dyferentsialne ta intehralne chyslennia funktsii odniiei zminnoi: navch. posibnyk / za red.

L. V. Kurpy [Higher mathematics in examples and problems: in 2 vols. Vol. 1: Analytical geometry and linear algebra. Differential and integral calculus of functions of one variable]. Kharkiv: NTU «KhPI» [in Ukraine].

14. Kurpa, L. V., Kyryllova, N. O. & Linnyk, H. B. (2009). Vyshcha matematyka v prykladakh i zadachakh: u 2 t. T.2: Dyferentsialne chyslennia funktsii bahatokh zminnykh. Dyferentsialni rivniannia ta riady: navch. posibnyk /za red. L. V. Kurpy [Higher mathematics in examples and problems: in 2 vols. Vol.2: Differential calculus of functions of many variables. Differential equations and series]. Kharkiv: NTU «KhPI» [in Ukraine].
15. Mumrjaeva, S. M. (2001). Algoritmicheskij podhod k izucheniju matematicheskogo analiza v pedvuze v uslovijah differencirovannogo obuchenija: dis… kand. ped. nauk.: 13.00.02 *[Algorithmic approach to the study of mathematical analysis in the pedagogical university in the conditions of differentiated learning].* Saransk [in Russian].
16. Ovchynnykov, P. P., Yaremchuk, F. & Mykhailenko, V. M. (Ed.). (2007). Vyshcha matematyka: Pidruchnyk. U 2 ch. Ch. 1: Liniina i vektorna alhebra. Analitychna heometriia. Vstup do matematychnoho analizu. Dyferentsialne i intehralne chyslennia *[Higher Mathematics: Textbook. In 2 parts Part 1: Linear and vector algebra. Analytical geometry. Introduction to mathematical analysis. Differential and integral calculus].* Kyiv: Tekhnika [in Ukraine].
17. Ovchynnykov, P.P., Yaremchuk, F.P. & Mykhailenko, V.M. (Ed.). (2007). Vyshcha matematyka: Pidruchnyk. U 2 ch. Ch. 2: Dyferentsialni rivniannia. Operatsiine chyslennia. Riady ta yikh zastosuvannia. Stiikist za Liapunovym. Rivniannia matematychnoi fizyky. Optymizatsiia i keruvannia. Teoriia ymovirnostei. Chyslovi metody *[Higher Mathematics: Textbook. In 2 parts Part 2: Differential equations. Operating calculus. Series and their application. Stability according to Lyapunov. Equation of mathematical physics. Optimization and management. Probability theory. Numerical methods]*. Kyiv: Tekhnika [in Ukraine].
18. Senchuk, Ju. F. (2003). Matematicheskij analiz dlja inzhenerov: ucheb. posobie: [v 2 ch.]. Ch. 1. Nac. tehn. un-t ". Har'kov. politehn. in-t" *[Mathematical analysis for engineers: textbook. allowance: [at 2 p.m.]. Part 1]*. Har'kov : NTU "HPI" [in Russian].
19. Senchuk, Ju. F. (2006). Matematicheskij analiz dlja inzhenerov: ucheb. posobie: [v 2 ch.]. Ch. 1. Nac. tehn. un-t "Har'kov. politehn. in-t" *[Mathematical analysis for engineers]*. Har'kov : NTU "HPI" [in Russian].
20. Tkacheva, M. V. (1994). Realizacija v obuchenii matematike mnogomernoj modeli differenciacii obrazovanija. Avtoref.diss...dokt. ped. Nauk *[Implementation of a multidimensional model of education differentiation in mathematics teaching]*.Moskva [in Russian].
21. Uteeva, P. A. (1998). Teoreticheskie osnovy organizacii uchebnoj dejatel'nosti uchashhihsja pri differencirovannom obuchenii matematike v srednej shkole *[Theoretical bases of the organization of educational activity of pupils at the differentiated training to mathematics in high school]*. *Candidate's thesis.* Moskva [in Russian].
22. Fedorkov, I. M. (1988). Vospitanie uchebno-poznavatel'noj samostojatel'nosti u studentov v processe izuchenija estestvenno-matematicheskih nauk *[Education of educational and cognitive independence in students in the process of studying natural and mathematical sciences]*. *Extended abstract of candidate's thesis* . Minsk [in Russian].

## ALGORITHMIZATION AS A METHOD OF HIGHER MATHEMATICS CONCEPTS FORMATION

***M.B. Kovalchuk***

*Vinnytsia National Technical University, Ukraine*

***Abstract.***

***Problem formulation.*** *Every science and every subject operates with a certain range of concepts inherent in them. The model of studying concepts influences the formation of students' knowledge and the level of their mastering. Higher mathematics is traditionally considered one of the most difficult subjects in technical universities. Taking into account the current trends in the information society, one of the important components of the successful professional activity of the future engineer is algorithmic activity. Therefore, the formation of mathematical knowledge and skills based on algorithmization is relevant today.*

***Materials and methods of research.*** *The research techniques were observation, analysis, and systematization of the accumulated information about the expediency of using algorithmization in the formation of higher mathematics concepts. Empirical analysis and simulation methods for the development of algorithms in the practice of teaching mathematics are also involved.*

***Results.*** *The main approaches to the algorithmization of the learning process are presented. The classification of algorithms depending on the type of educational activity and a differentiated approach to learning is carried out. The expediency of using the algorithmic approach in the theory and practice of teaching mathematics is substantiated.*

***Conclusions.*** *The use of algorithms and algorithmic approach in teaching mathematics contributes to the conscious perception of mathematical material, provides conciseness, accuracy, the orderliness of mental operations, and has a positive effect on the quality of acquired knowledge of computer science and mathematics.*

***Keywords:*** *algorithmization of training, mathematical concepts, informatization of education, methods of computer science, logical-algorithmic knowledge, algorithm.*